

Metody obliczeniowe w mechanice budowli

Obliczanie belek metodą elementów skończonych

Tok postępowania

1. Dyskretyzacja
2. Wyznaczenie całkowitego globalnego wektora obciążeń
3. Wyznaczenie globalnej macierzy sztywności
4. Rozwiązanie macierzowego układu równań statyki:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{K} - globalna macierz sztywności, \mathbf{u} - poszukiwany globalny wektor przemieszczeń i obrotów, \mathbf{f} - całkowity globalny wektor sił węzłowych obliczony jako

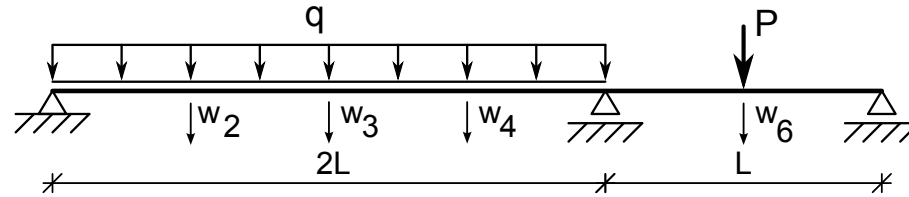
$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_w + \mathbf{f}_{Rw} \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{f}_w - globalny wektor sił przyłożonych w węzłach, \mathbf{f}_{Rw} - globalny wektor równoważnych sił węzłowych.

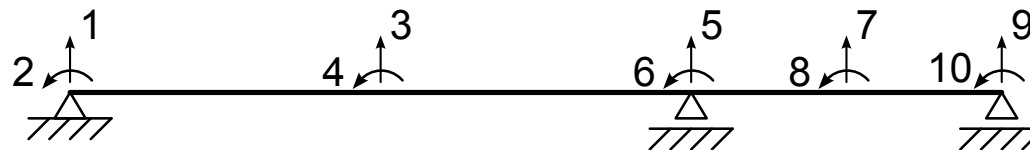
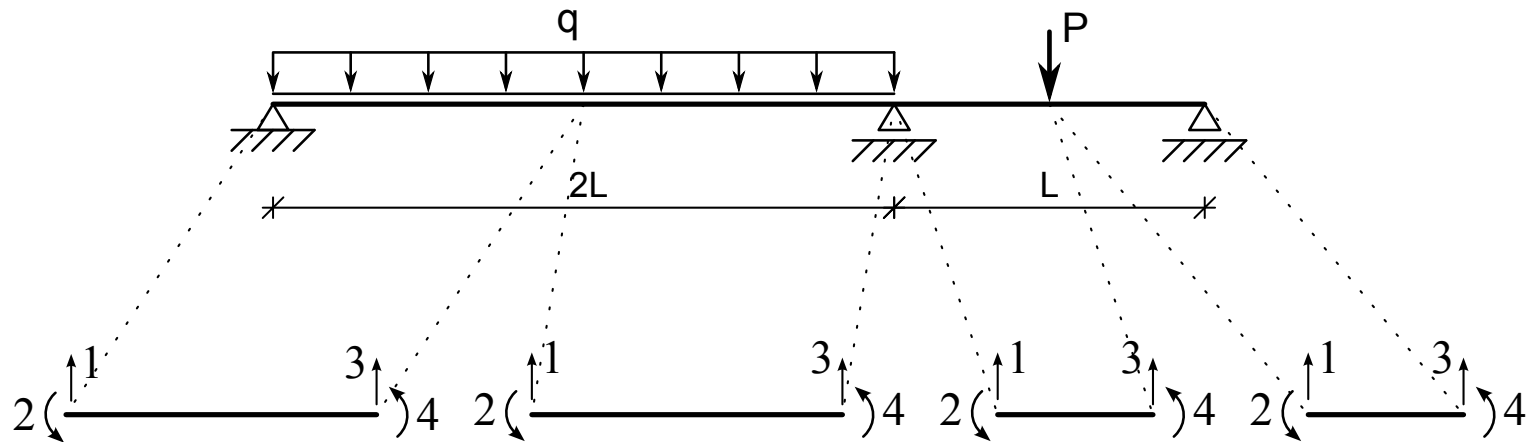
Reakcje podporowe oblicza się ze wzoru

$$\mathbf{r} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (3)$$

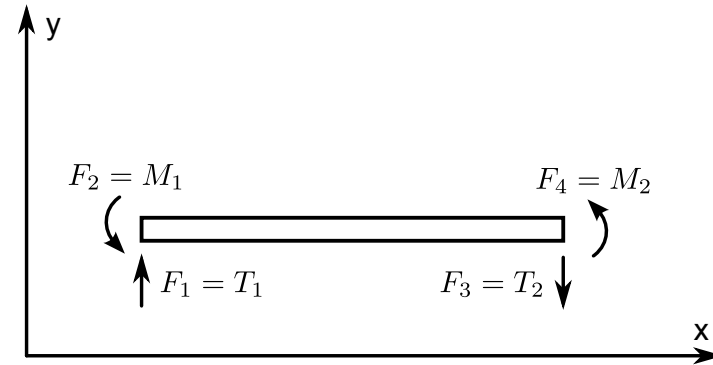
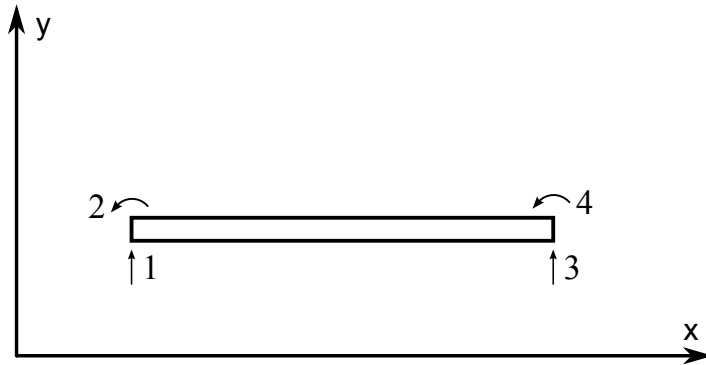
Rozwiązać belkę metodą elementów skończonych



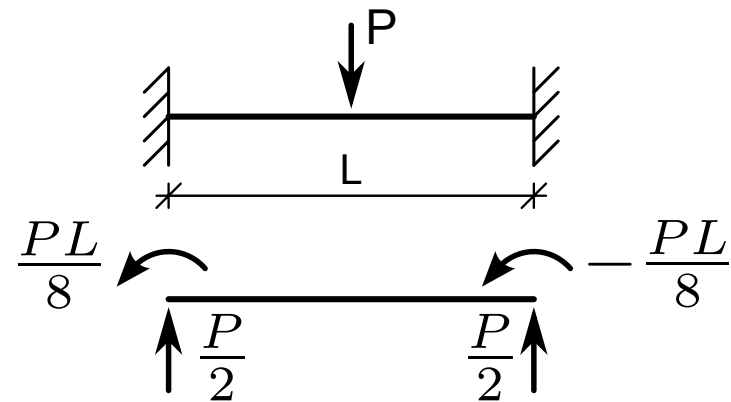
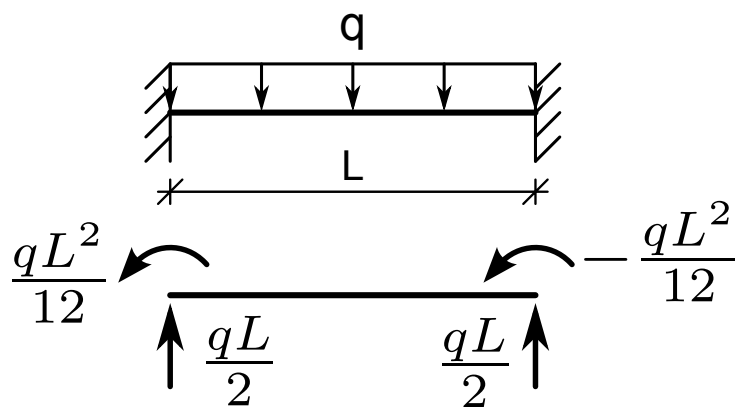
Dyskretyzacja



konwencja przemieszczeń i sił dodatnich



zastępcze (równoważne) obciążenie w węzłach od obciążania pomiędzy węzłami



- wektor sił przyłożonych w węzłach

$$\mathbf{f}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- wektor równoważnych sił węzłowych

$$\mathbf{f}_{Rw}^{e1} = \mathbf{f}_{Rw}^{e2} = \begin{bmatrix} -4.5000 \\ -2.2500 \\ -4.5000 \\ 2.2500 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{Rw}^{e3} = \mathbf{f}_{Rw}^{e4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

globalny wektor sił węzłowych $\tilde{\mathbf{f}}$ i zredukowany po uwzględnieniu warunków brzegowych \mathbf{f} (otrzymany po wykreśleniu wierszy 1, 5 i 9)

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -4.5000 \\ -2.2500 \\ -9.0000 \\ 0 \\ -4.5000 \\ 2.2500 \\ -30.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -2.2500 \\ -9.0000 \\ 0 \\ 2.2500 \\ -30.0000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

- macierz sztywności elementu belkowego

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_1^e = \mathbf{K}_2^e = 10^5 \begin{bmatrix} 2.5778 & 3.8667 & -2.5778 & 3.8667 \\ 3.8667 & 7.7333 & -3.8667 & 3.8667 \\ -2.5778 & -3.8667 & 2.5778 & -3.8667 \\ 3.8667 & 3.8667 & -3.8667 & 7.7333 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_3^e = \mathbf{K}_4^e = 10^6 \begin{bmatrix} 2.0622 & 1.5467 & -2.0622 & 1.5467 \\ 1.5467 & 1.5467 & -1.5467 & 0.7733 \\ -2.0622 & -1.5467 & 2.0622 & -1.5467 \\ 1.5467 & 0.7733 & -1.5467 & 1.5467 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = 10^9 \begin{bmatrix} 0.0026 & 0.0039 & -0.0026 & 0.0039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0039 & 0.0077 & -0.0039 & 0.0039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0026 & -0.0039 & 0.0052 & 0 & -0.0026 & 0.0039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0039 & 0.0039 & 0 & 0.0155 & -0.0039 & 0.0039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0026 & -0.0039 & 0.0232 & 0.0116 & -0.0206 & 0.0155 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0039 & 0.0039 & 0.0116 & 0.0232 & -0.0155 & 0.0077 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0206 & -0.0155 & 0.0412 & 0 & -0.0206 & 0.0155 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0155 & 0.0077 & 0 & 0.0309 & -0.0155 & 0.0077 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0206 & -0.0155 & 0.0206 & -0.0155 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0155 & 0.0077 & -0.0155 & 0.0155 \end{bmatrix} \quad (10)$$

po uwzględnieniu warunków brzegowych

$$\mathbf{K} = 10^9 \begin{bmatrix} 0.0077 & -0.0039 & 0.0039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0039 & 0.0052 & 0 & 0.0039 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0039 & 0 & 0.0155 & 0.0039 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0039 & 0.0039 & 0.0232 & -0.0155 & 0.0077 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0155 & 0.0412 & 0 & 0.0155 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0077 & 0 & 0.0309 & 0.0077 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0155 & 0.0077 & 0.0155 \end{bmatrix} \quad (11)$$

W wyniku rozwiązania układu równań $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$ przemieszczenia i obroty wynoszą

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_{10} \end{bmatrix} = 10^{-5} \begin{bmatrix} -0.2134 \\ -0.3055 \\ 0.0630 \\ -0.0388 \\ -0.1491 \\ -0.0315 \\ 0.1649 \end{bmatrix} \quad (12)$$

stąd przemieszczenia lokalne elementów wynoszą

$$\mathbf{u}^{e1} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2134 \\ -0.3055 \\ 0.0630 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{e2} = 10^{-5} \begin{bmatrix} -0.3055 \\ 0.0630 \\ 0 \\ -0.0388 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{u}^{e3} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0388 \\ -0.1491 \\ -0.0315 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{e4} = 10^{-5} \begin{bmatrix} -0.1491 \\ -0.0315 \\ 0 \\ 0.1649 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Obliczenie sił wewnętrznych \mathbf{F} (sił poprzecznych i momentów zginających) poszczególnych elementów w węzłach

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{f}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (15)$$

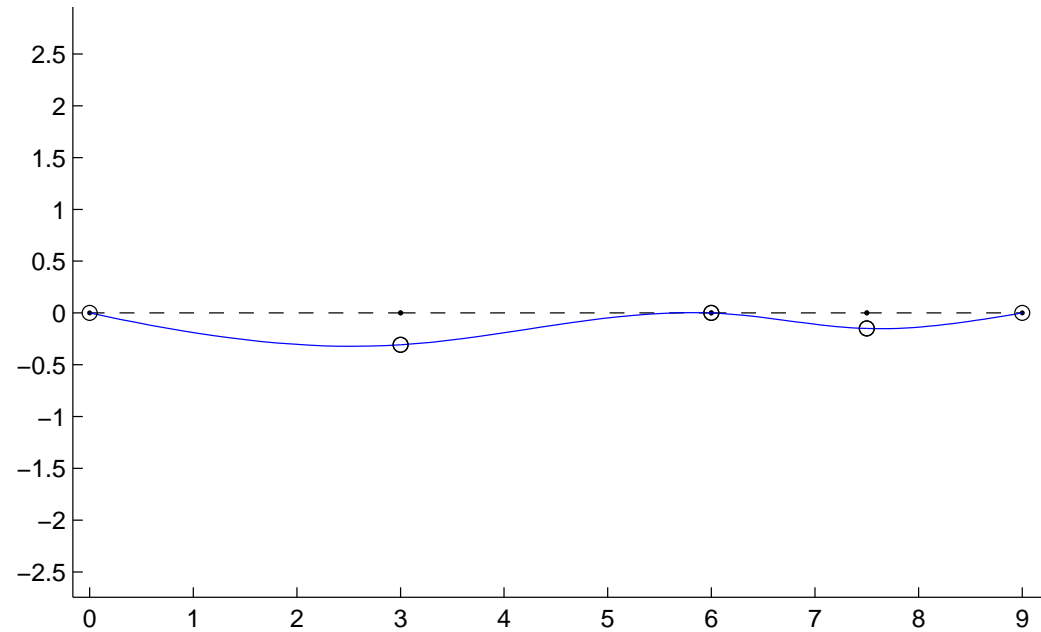
gdzie \mathbf{f}^e – wektor sił węzłowych elementu, \mathbf{K}^e – macierz sztywności elementu, \mathbf{u}^e – wektor przemieszczeń i obrotów węzłowych elementu otrzymany z globalnego wektora przemieszczeń i obrotów \mathbf{u} .

Stąd po obliczeniu otrzymuje się siły wewnętrzne w poszczególnych elementach

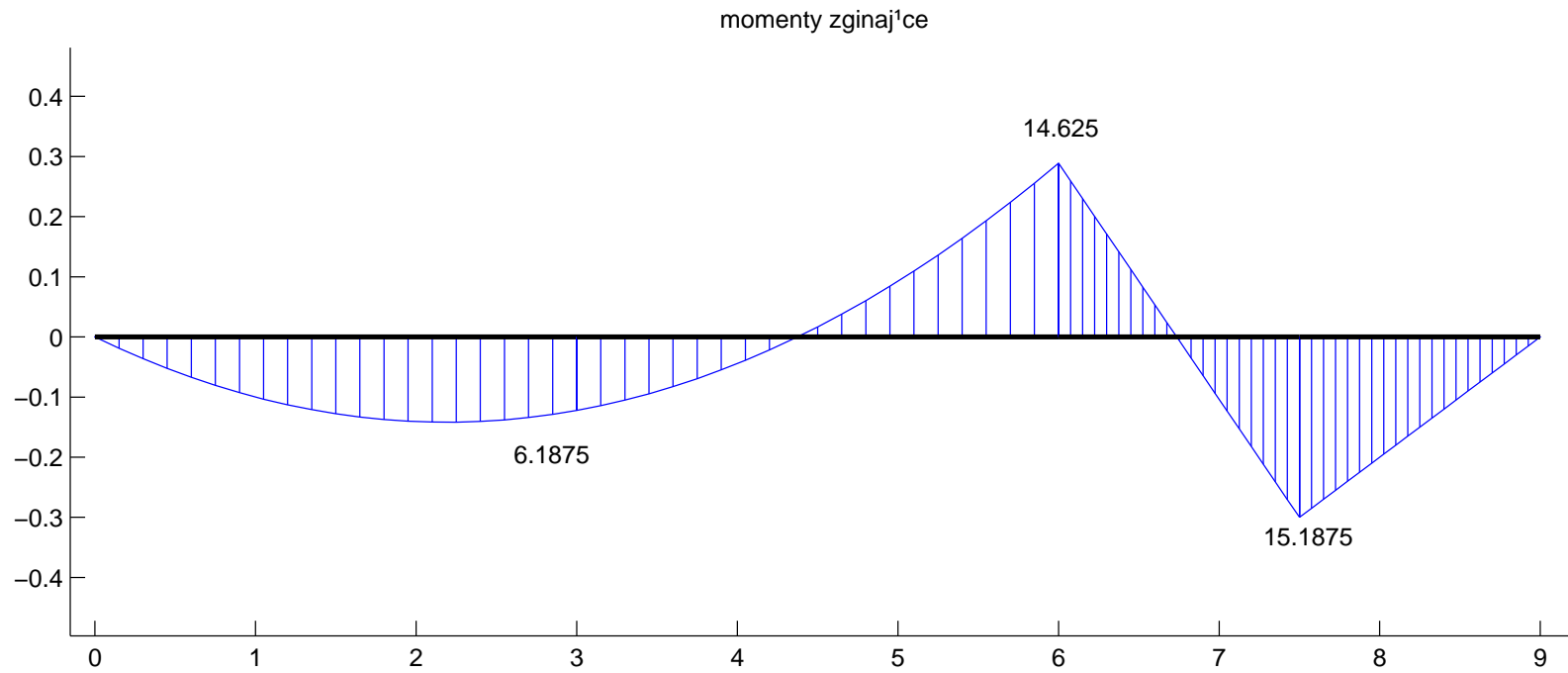
$$\mathbf{F}^{e1} = \begin{bmatrix} 6.5625 \\ -0.0000 \\ 2.4375 \\ 6.1875 \end{bmatrix}, \mathbf{F}^{e2} = \begin{bmatrix} -2.4375 \\ -6.1875 \\ 11.4375 \\ -14.6250 \end{bmatrix}, \mathbf{F}^{e3} = \begin{bmatrix} 19.8750 \\ 14.6250 \\ -19.8750 \\ 15.1875 \end{bmatrix}, \mathbf{F}^{e4} = \begin{bmatrix} -10.1250 \\ -15.1875 \\ 10.1250 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ugięcie belki

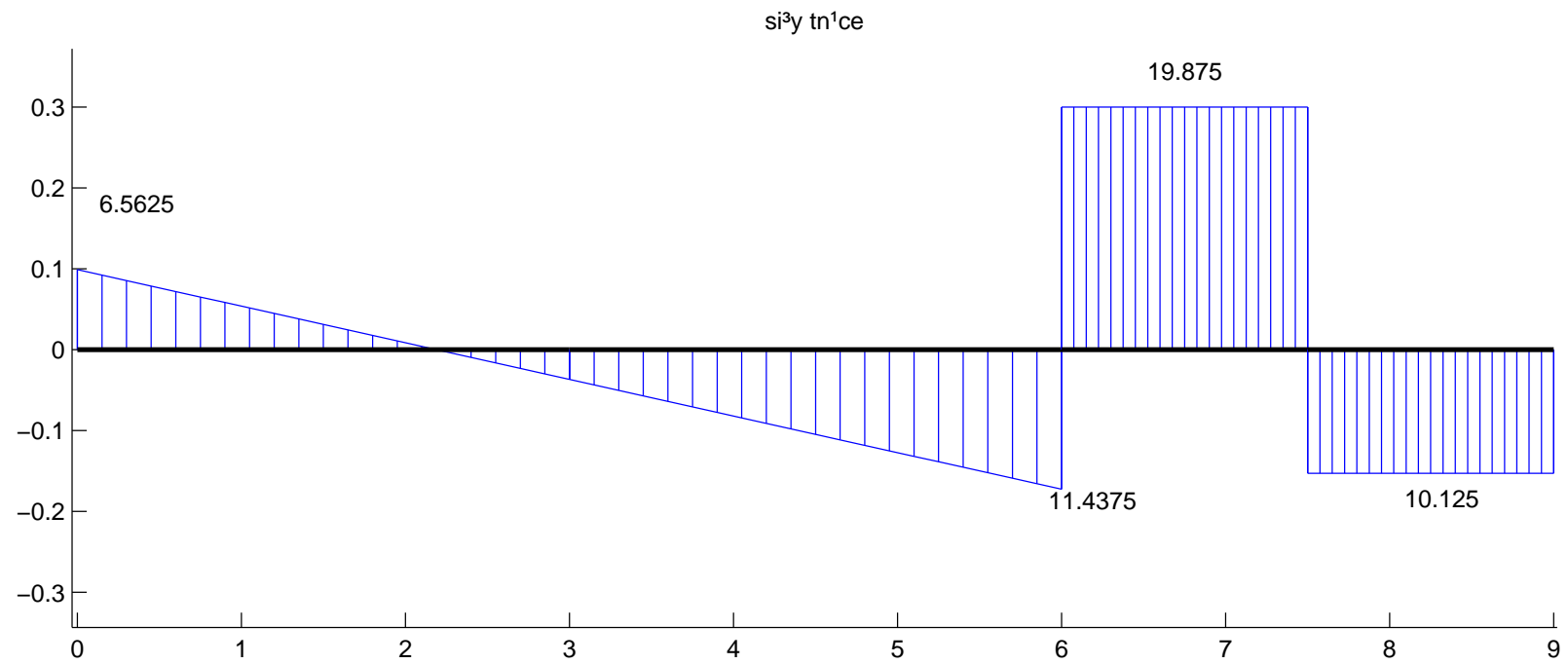
ugięcie belki: przemieszczenia i obroty



Momenty zginające

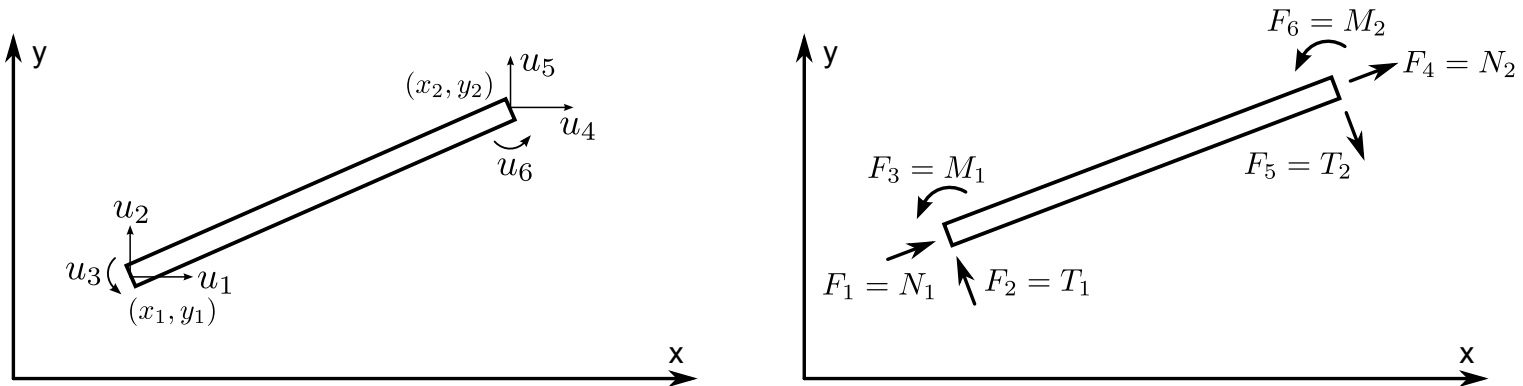


Siły tnące



MES układów ramowych

- konwencja przemieszczeń i sił dodatnich w lokalnym układzie współrzędnych



$\bar{\mathbf{K}}_i^e$ - sformułowana w lokalnym układzie (metodą funkcji kształtu) jak dla analizy statycznej metody elementów skończonych

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (17)$$

macierze sztywności i bezwładności elementów należy odnieść do globalnego układu współrzędnych za pomocą macierzy transformacji

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{G}, \quad (18)$$

gdzie

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} n_{x\bar{x}} & n_{y\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{x\bar{y}} & n_{y\bar{y}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{x\bar{x}} & n_{y\bar{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{x\bar{y}} & n_{y\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

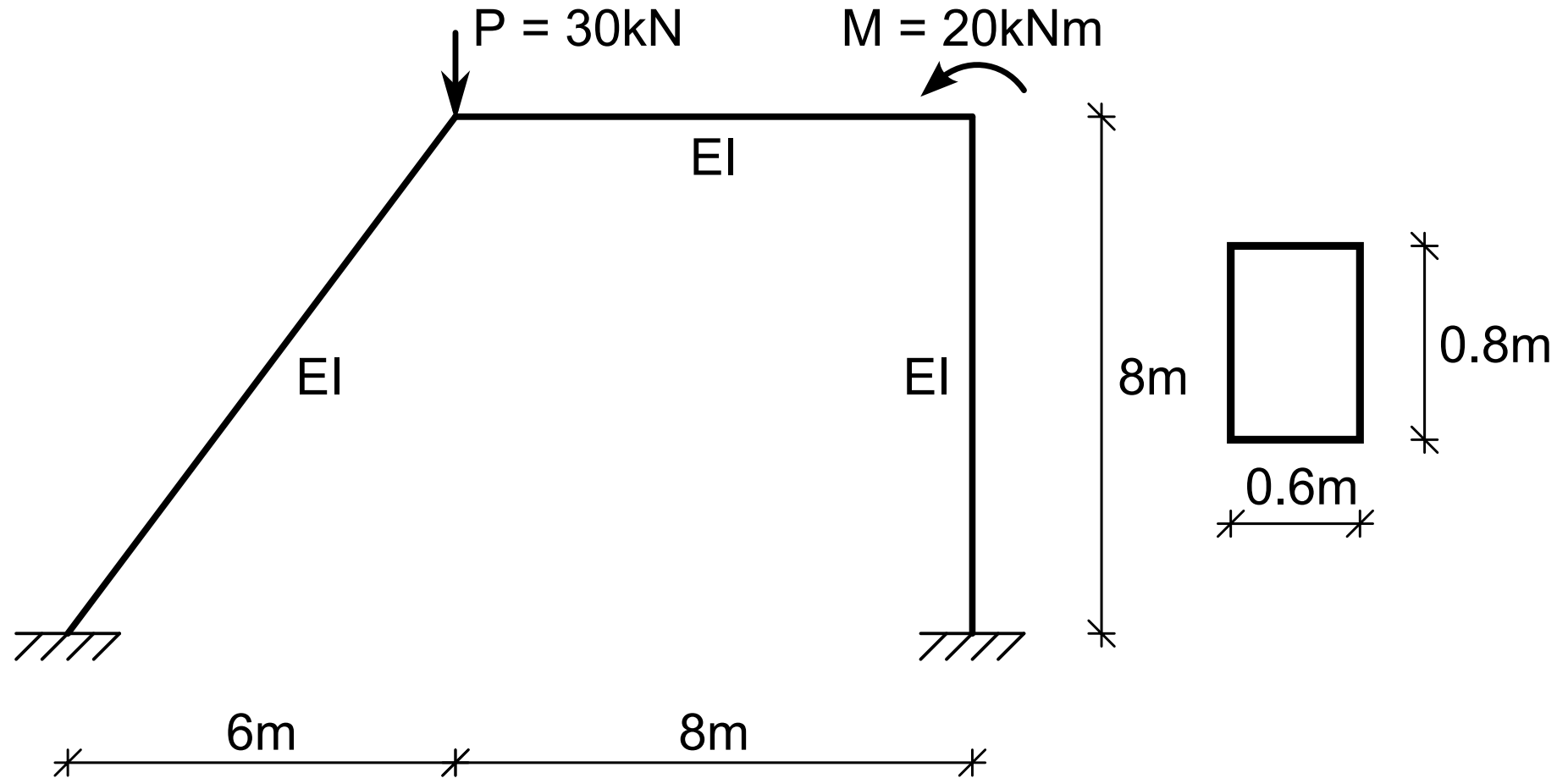
gdzie macierz transformacji \mathbf{G} zawiera kosinusy kierunkowe

$$n_{x\bar{x}} = n_{y\bar{y}} = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad n_{y\bar{x}} = -n_{x\bar{y}} = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad (20)$$

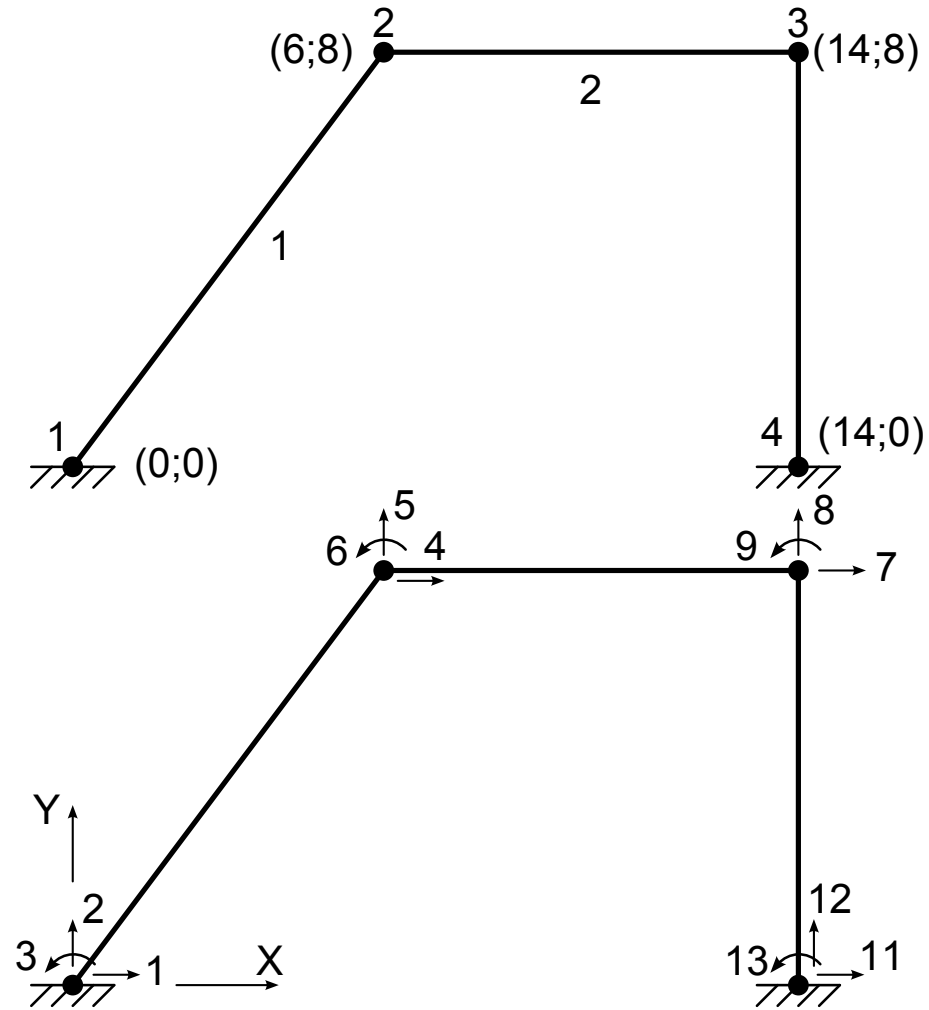
gdzie

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (21)$$

Rozwiązać ramę metodą elementów skończonych. Dane: $E = 20 \text{ GPa}$.



Dyskretyzacja



$K_{e1}' =$

$1.0e+09 *$

1.2000	0	0	-1.2000	0	0
0	0.0077	0.0384	0	-0.0077	0.0384
0	0.0384	0.2560	0	-0.0384	0.1280
-1.2000	0	0	1.2000	0	0
0	-0.0077	-0.0384	0	0.0077	-0.0384
0	0.0384	0.1280	0	-0.0384	0.2560

$G_{e1} =$

0.6000	0.8000	0	0	0	0
-0.8000	0.6000	0	0	0	0
0	0	1.0000	0	0	0
0	0	0	0.6000	0.8000	0
0	0	0	-0.8000	0.6000	0
0	0	0	0	0	1.0000

$K_{e1} =$

$1.0e+08 *$

4.3692	5.7231	-0.3072	-4.3692	-5.7231	-0.3072
5.7231	7.7076	0.2304	-5.7231	-7.7076	0.2304
-0.3072	0.2304	2.5600	0.3072	-0.2304	1.2800
-4.3692	-5.7231	0.3072	4.3692	5.7231	0.3072
-5.7231	-7.7076	-0.2304	5.7231	7.7076	-0.2304
-0.3072	0.2304	1.2800	0.3072	-0.2304	2.5600

Ke2' =

1.0e+09 *

1.5000	0	0	-1.5000	0	0
0	0.0150	0.0600	0	-0.0150	0.0600
0	0.0600	0.3200	0	-0.0600	0.1600
-1.5000	0	0	1.5000	0	0
0	-0.0150	-0.0600	0	0.0150	-0.0600
0	0.0600	0.1600	0	-0.0600	0.3200

Ge2 =

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

Ke2 =

1.0e+09 *

1.5000	0	0	-1.5000	0	0
0	0.0150	0.0600	0	-0.0150	0.0600
0	0.0600	0.3200	0	-0.0600	0.1600
-1.5000	0	0	1.5000	0	0
0	-0.0150	-0.0600	0	0.0150	-0.0600
0	0.0600	0.1600	0	-0.0600	0.3200

$K_{e3}' =$

$1.0e+09 *$

1.5000	0	0	-1.5000	0	0
0	0.0150	0.0600	0	-0.0150	0.0600
0	0.0600	0.3200	0	-0.0600	0.1600
-1.5000	0	0	1.5000	0	0
0	-0.0150	-0.0600	0	0.0150	-0.0600
0	0.0600	0.1600	0	-0.0600	0.3200

$G_{e3} =$

0	-1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	-1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1

$K_{e3} =$

$1.0e+09 *$

0.0150	0	0.0600	-0.0150	0	0.0600
0	1.5000	0	0	-1.5000	0
0.0600	0	0.3200	-0.0600	0	0.1600
-0.0150	0	-0.0600	0.0150	0	-0.0600
0	-1.5000	0	0	1.5000	0
0.0600	0	0.1600	-0.0600	0	0.3200

K =

1.0e+09 *

0.4369	0.5723	-0.0307	-0.4369	-0.5723	-0.0307	0	0	0	0	0	0
0.5723	0.7708	0.0230	-0.5723	-0.7708	0.0230	0	0	0	0	0	0
-0.0307	0.0230	0.2560	0.0307	-0.0230	0.1280	0	0	0	0	0	0
-0.4369	-0.5723	0.0307	1.9369	0.5723	0.0307	-1.5000	0	0	0	0	0
-0.5723	-0.7708	-0.0230	0.5723	0.7858	0.0370	0	-0.0150	0.0600	0	0	0
-0.0307	0.0230	0.1280	0.0307	0.0370	0.5760	0	-0.0600	0.1600	0	0	0
0	0	0	-1.5000	0	0	1.5150	0	0.0600	-0.0150	0	0.0600
0	0	0	0	-0.0150	-0.0600	0	1.5150	-0.0600	0	-1.5000	0
0	0	0	0	0.0600	0.1600	0.0600	-0.0600	0.6400	-0.0600	0	0.1600
0	0	0	0	0	0	-0.0150	0	-0.0600	0.0150	0	-0.0600
0	0	0	0	0	0	0	-1.5000	0	0	1.5000	0
0	0	0	0	0	0	0.0600	0	0.1600	-0.0600	0	0.3200

Wektor sił zewnętrznych w węzłach

$\mathbf{f} =$

0

0

0

0

-30

0

0

0

20

0

0

0

Obliczone przemieszczenia i obroty

$u =$

$1.0e-06 *$

0

0

0

0.6183

-0.4899

-0.0079

0.6113

-0.0043

0.0214

0

0

0

Siły wewnętrzne oblicza się ze wzoru:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{f}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (22)$$

gdzie \mathbf{f}^e – wektor sił węzłowych elementu, \mathbf{K}^e – macierz sztywności elementu, \mathbf{u}^e – wektor przemieszczeń i obrotów węzłowych elementu otrzymany z globalnego wektora przemieszczeń i obrotów \mathbf{u} .

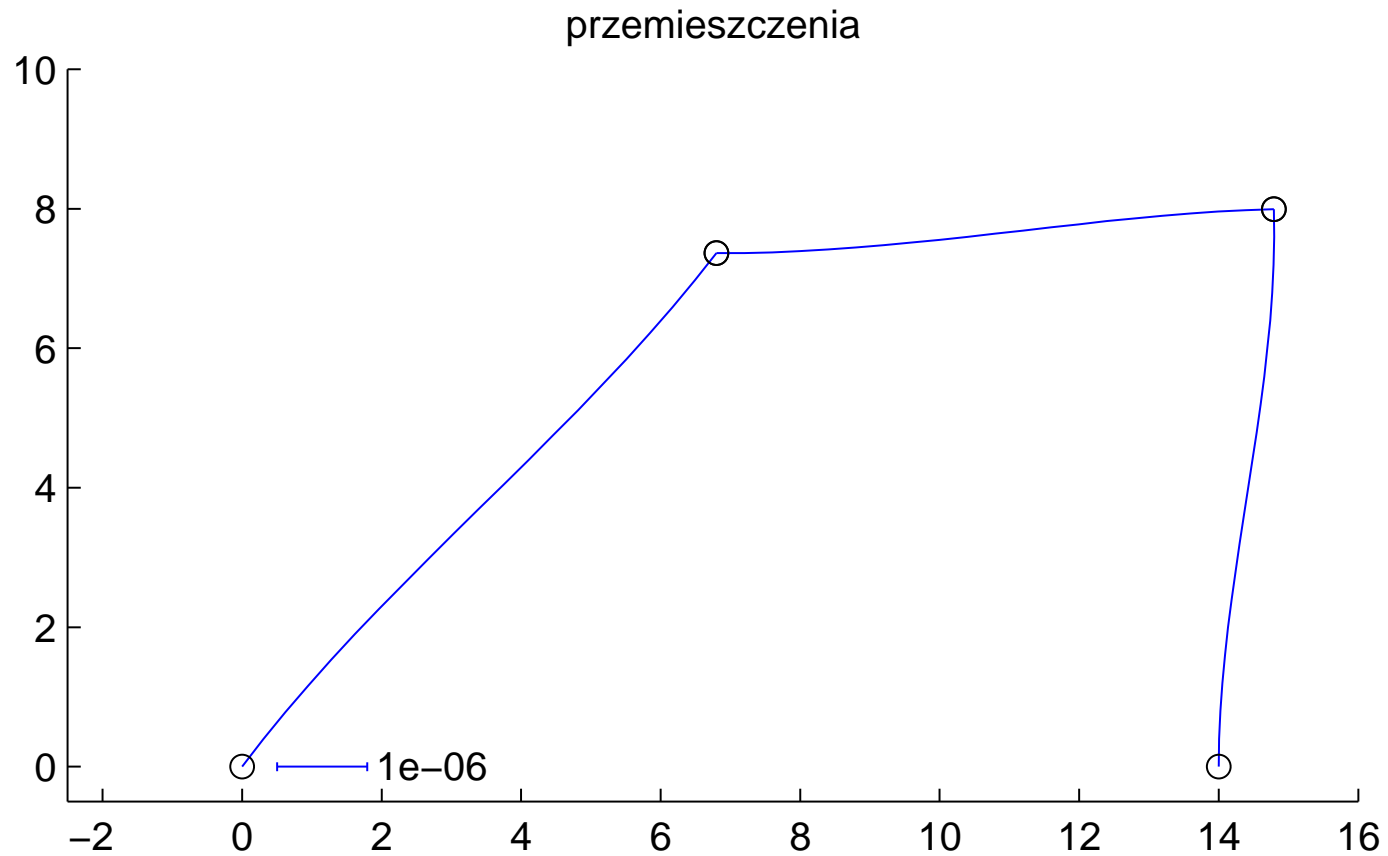
- następnie z układu globalnego przechodzimy do układu lokalnego

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{G}\mathbf{F} \quad (23)$$

Siły w poszczególnych elementach 1, 2 i 3 na początku i na końcu prętów N^{ei} , T^{ei} , M^{ei} , N^{ej} , T^{ej} , M^{ej}

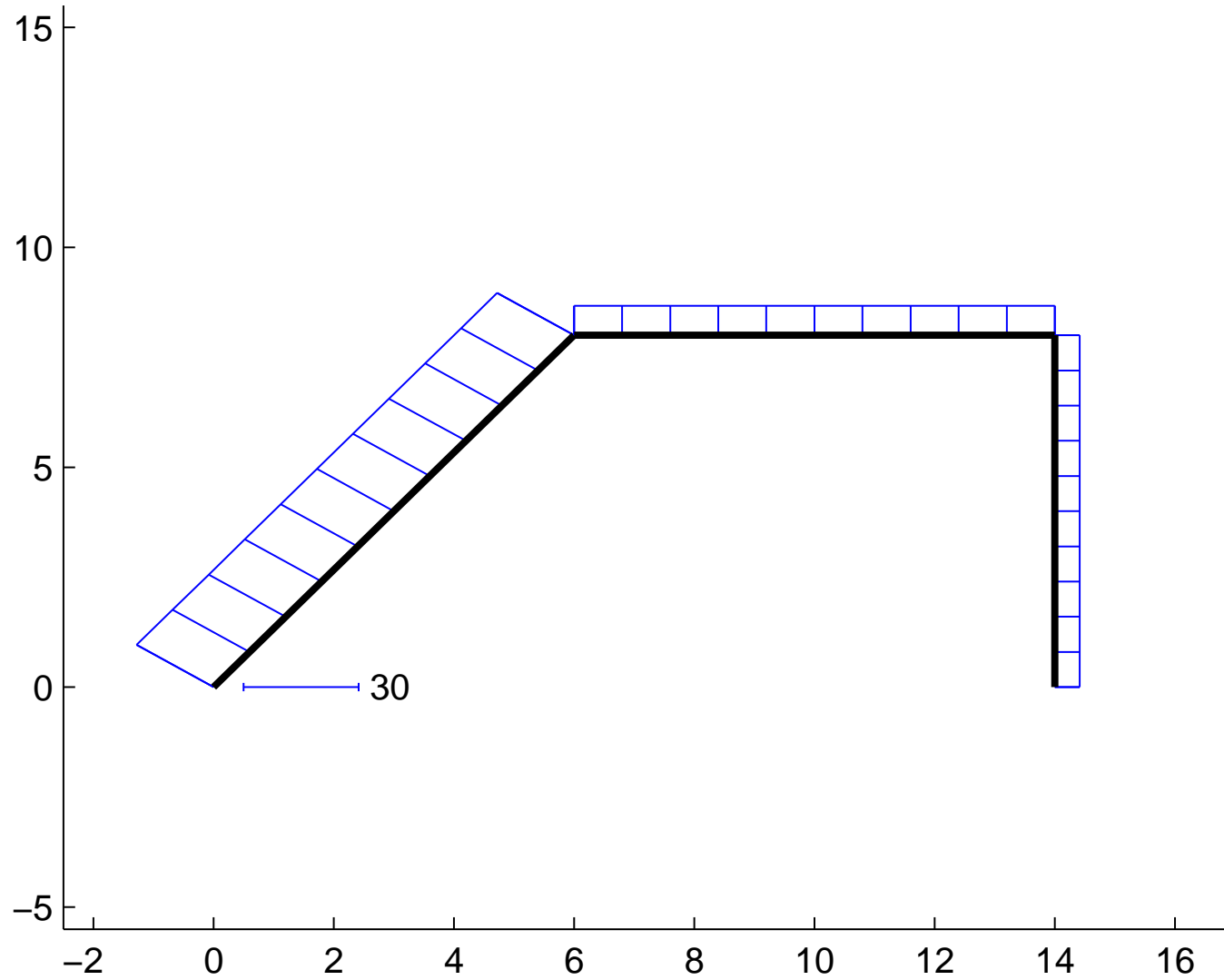
$$\bar{\mathbf{F}}^{e1} = \begin{bmatrix} 25.0952 \\ 5.7508 \\ 29.2626 \\ -25.0952 \\ -5.7508 \\ 28.2451 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}^{e2} = \begin{bmatrix} 10.4565 \\ -6.4734 \\ -28.2451 \\ -10.4565 \\ 6.4734 \\ -23.5418 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}^{e3} = \begin{bmatrix} 6.4734 \\ 10.4565 \\ 43.5418 \\ -6.4734 \\ -10.4565 \\ 40.1104 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ugięcie belki



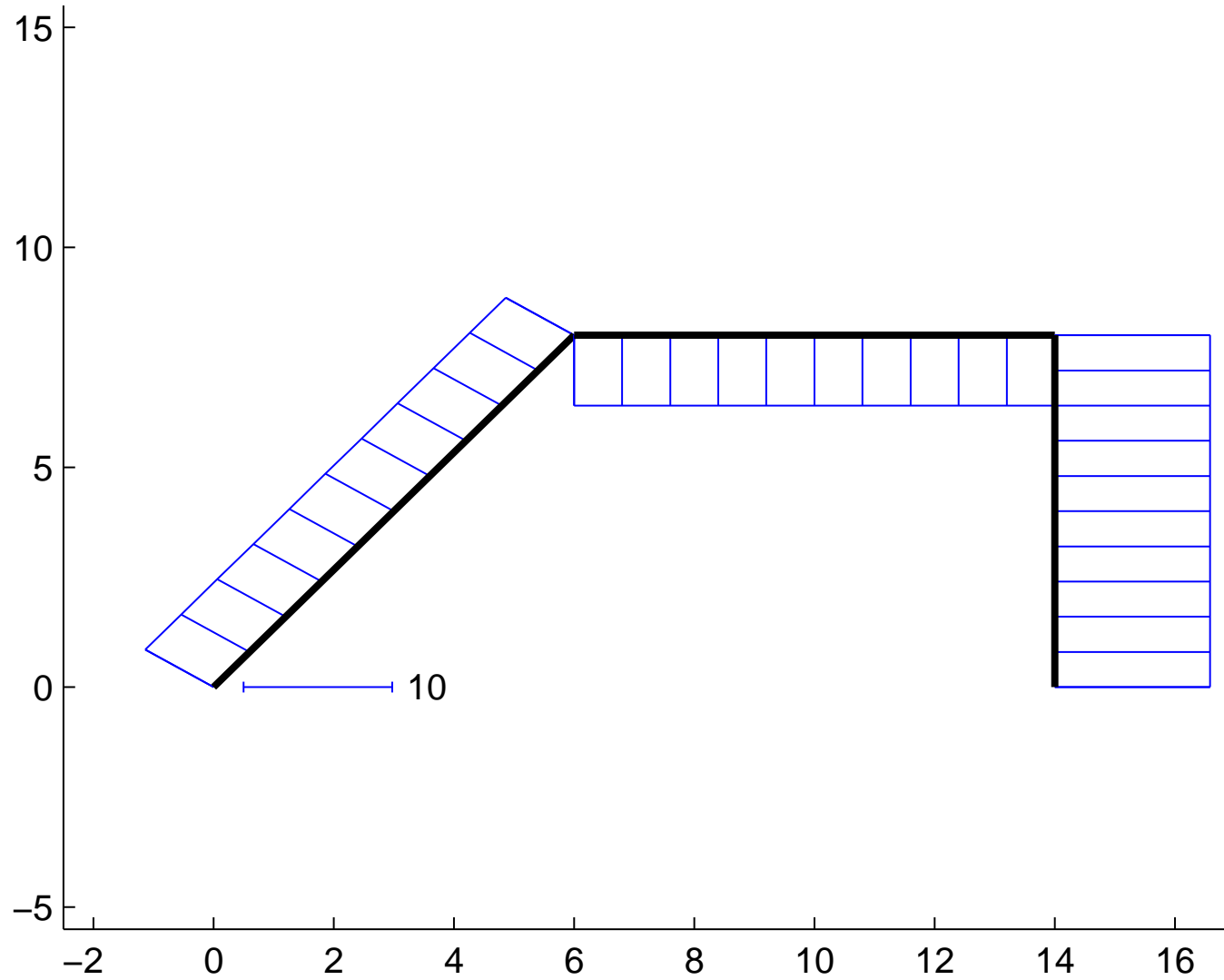
Sily osiowe

sily osiowe



Siły tnące

sily tnace



Momenty zginające

