POLITECHNIKA OPOLSKA

Podstawy dynamiki budowli

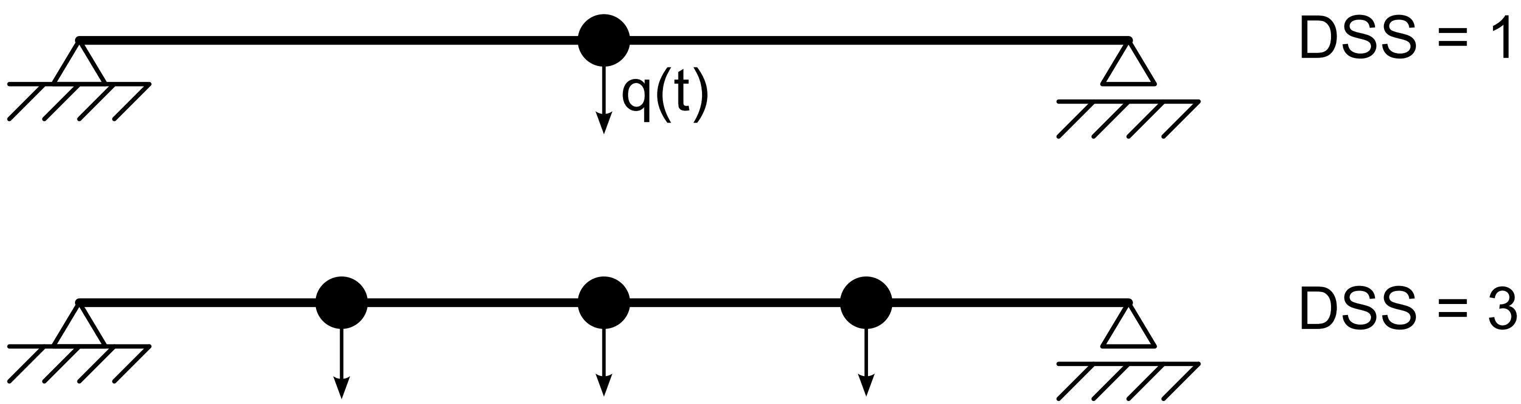
Spis zadań

Dynamiczne stopnie swobody (Dynamic degrees of freedom) SDOF MDOF

Liczba dynamicznych stopni swobody
The number of dynamic degrees of freedom

Dynamiczne stopnie swobody (DSS) - liczba niezależnych współrzędnych uogólnionych niezbędna do opisania położenia wszystkich punktów materialnych w każdej chwili względem położenia równowagi statycznej.

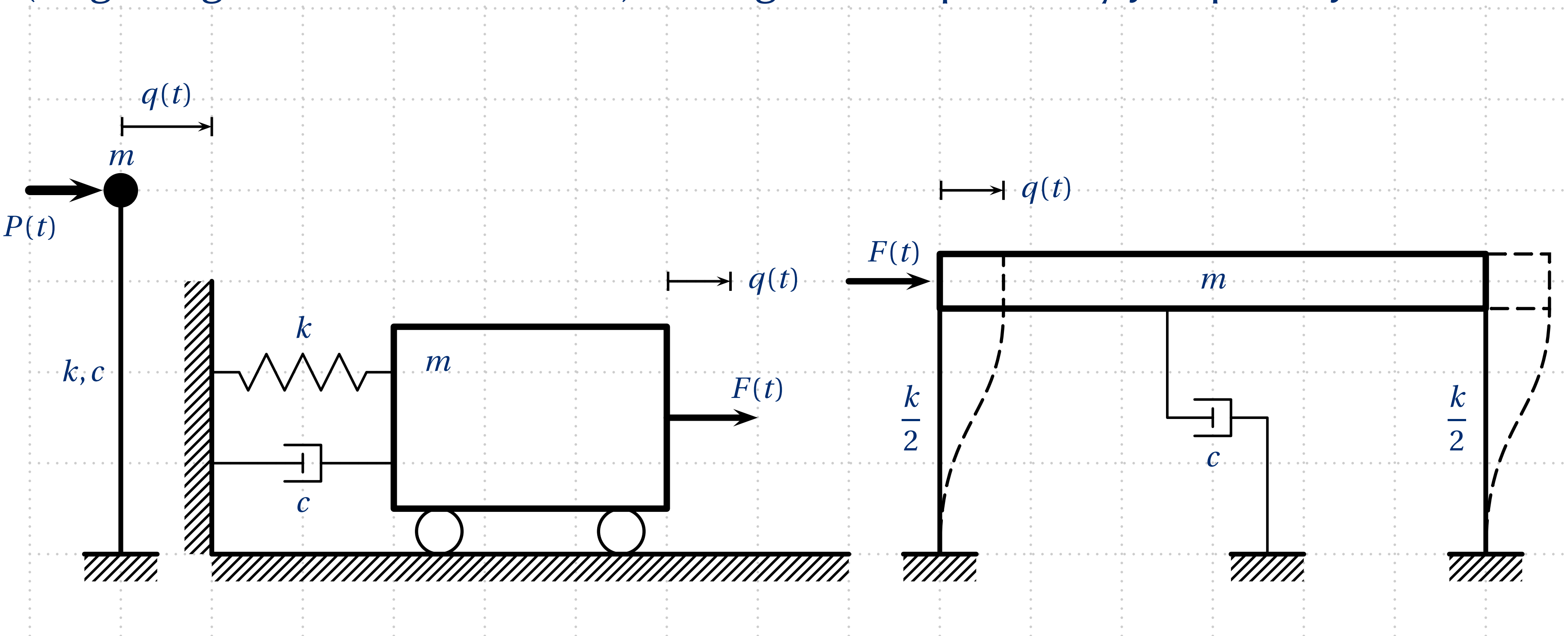
Dynamic degrees of freedom (DOF) - number of independent directions to describe the location of all points (particles) at any time with respect to the location of static equilibrium



Ukł. o jednym stopniu swobody SDOF (modele)

Układ o jednym stopniu swobody

Najprostszym układem w dynamice budowli jest układ o jednym stopniu swobody (single degree of freedom SDOF), którego model pokazany jest poniżej



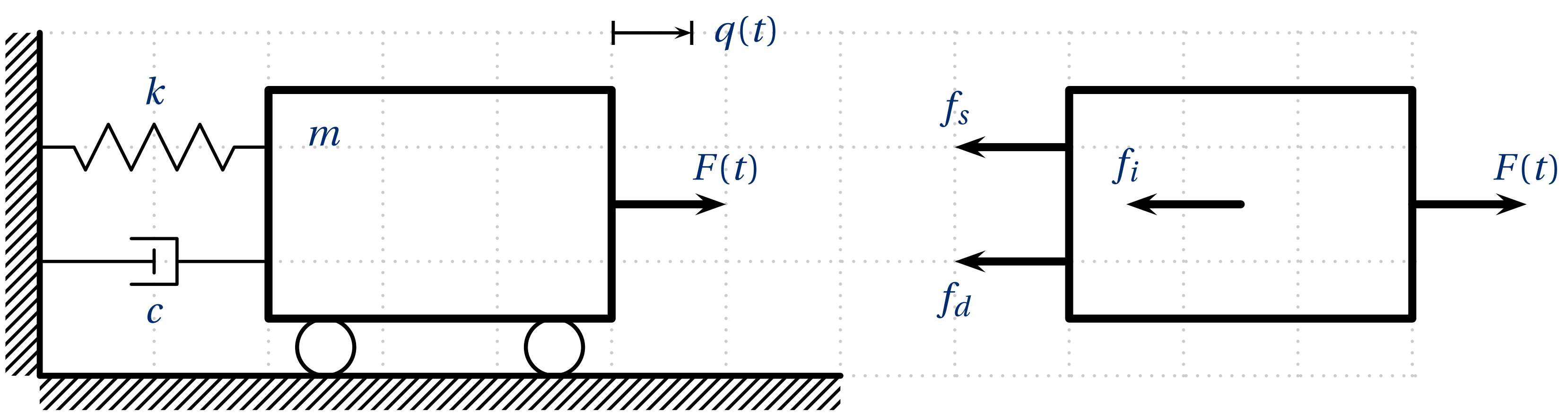
Układ SDOF charakteryzuje się masą m, sztywnością k, współczynnikiem tłumienia c. Na układ działa siła dynamiczna $P(t)$ lub warunki początkowe: przemieszczenie początkowe q_0, prędkość początkowa $\dot{q}_0$. W wyniku tych oddziaływań układ doznaje przemieszczeń $q(t)$ (odpowiedź układu).

Równanie ruchu SDOF - wyprowadzenie

Równanie ruchu w dynamice

Zasady formułowania równań ruchu w dynamice
Methods to formulate equations of motion in dynamics

1. równanie równowagi dynamicznej (equation of static equlibrium)
2. równanie Lagrange'a (Lagrange equation)
3. zasada Hamiltona (Hamilton's principle)
4. zasada prac wirtualnych (Principle of virtual work)



$$f_i + f_d + f_s = P(t) \tag{1}$$

- f_i - siła bezwładności inertia force ($f_i = m\ddot{q}$),
- f_d - siła tłumienia damping force ($f_d = c\dot{q}$),
- f_s - siła sprężystości elastic force ($f_s = kq$),

Równanie ruchu w dynamice

po podstawieniu wyrażeń na poszczególne siły otrzymamy równanie ruchu układu o jednym stopniu swobody, które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = P(t) \tag{2}$$

można dołączyć warunki początkowe na przemieszczenie q i prędkość $\dot{q}$:

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \tag{3}$$

Równania ruchu

Wyprowadzenie równania ruchu z równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial E_k}{\partial q_i}}_{0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{4}$$

- dla małych drgań energia kinetyczna nie zależy od przem. q_i, stąd $\partial E_k / \partial q_i = 0$
- E_k – energia kinetyczna,

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{q}_i{}^2 \tag{5}$$

- E_p – energia potencjalna,

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_i k_i q_i^2 \tag{6}$$

- Φ – funkcja tłumienia,

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_i c_i \dot{q}_i{}^2 \tag{7}$$

- L – praca sił zewnętrznych.

$$L = \sum_i P_i q_i \tag{8}$$

Zagadnienie własne - wyprowadzenie

Zagadnienie własne

Jeśli pominąć w powyższym równaniu ruchu siłę tłumienia i siłę zewnętrzną to otrzymamy równanie tzw. zagadnienia własnego (free undamped vibrations)

$$\left\{ m\ddot{q} + kq = 0 \quad \text{lub} \quad \ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0 q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \right. \tag{9}$$

Ponieważ nie występuje siła zewnętrzna, przyczyną ruchu są warunki początkowe $q(0) = q_0$ i/lub $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$.
Równanie (9) jest jednorodnym równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu o stałych współczynnikach, które rozwiązujemy w następujący sposób:
- przewidujemy rozwiązanie w postaci $q = e^{rt}$, której pochodne mają postać

$$\dot{q} = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = r^2 e^{rt} \tag{10}$$

po podstawieniu otrzymamy równanie charakterystyczne, które jest równaniem kwadratowym

$$e^{rt}(mr^2 + k) = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2 + k = 0 \tag{11}$$

$$\Delta = -4\frac{k}{m}, \quad \sqrt{\Delta} = 2\frac{k}{m} i \tag{12}$$

Zagadnienie własne

Niech $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$ wówczas

$$r_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \pm\omega i \tag{13}$$

$$q(t) = e^{(0+\omega_0 i)\,t} = e^{\omega_0\, i\, t} \tag{14}$$

zamieniając postać wykładniczą liczby zespolonej na trygonometryczną otrzymamy

$$RORJ: \quad q(t) = e^{0\,t} \cdot (C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t) = C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t \tag{15}$$

gdzie C_1 i C_2 to stałe całkowania, które wyznacza się z warunków początkowych

Zagadnienie własne

Wyznaczenie stałych całkowania C_1 i C_2 z warunków początkowych

- przemieszczenie początkowe (initial displacement)

$$q(0) = C_1 \overbrace{\sin 0}^{0} + C_2 \overbrace{\cos 0}^{1} = q_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = q_0 \tag{16}$$

- prędkość początkowa (initial velocity)

$$\dot{q}(t) = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - C_2 \omega_0 \sin \omega_0 t \tag{17}$$

$$\dot{q}(0) = C_1 \omega_0 \overbrace{\cos 0}^{1} - C_2 \omega_0 \overbrace{\sin 0}^{0} = \dot{q}_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \tag{18}$$

stąd (thus)

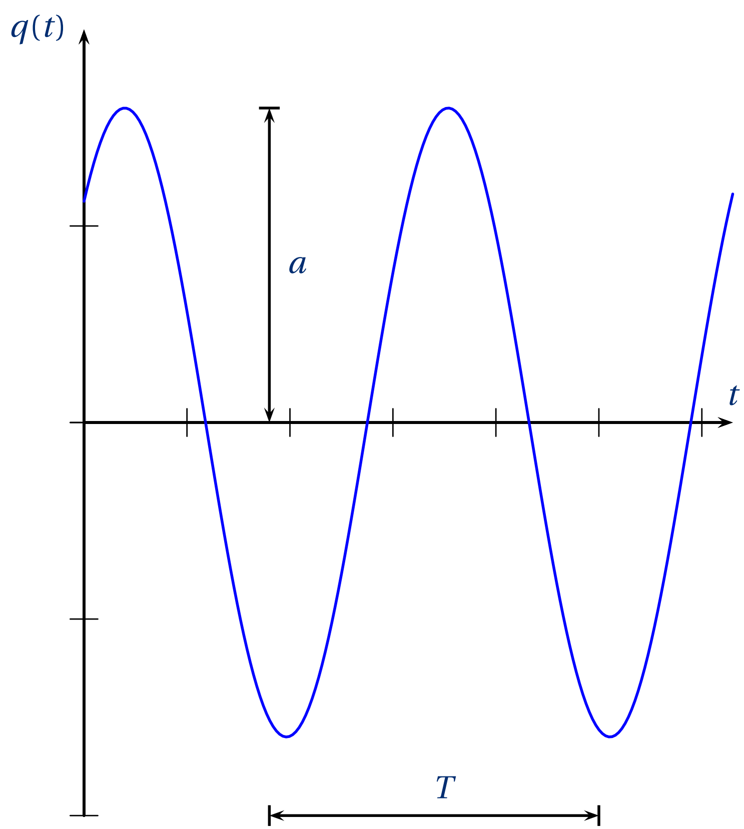
$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + q_0 \cos \omega_0 t = a \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{19}$$

$$a = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \varphi = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\omega_0 q_0}{\dot{q}_0} \tag{20}$$

Drgania własne

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + q_0 \cos \omega_0 t = a \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{21}$$

parametry: ω_0, T, f



Drgania swobodne - wyprowadzenie

Drgania swobodne (1)

Drgania swobodne to drgania układu spowodowane zaburzeniem stanu równowagi w wyniku niezerowych warunków początkowych. Równanie drgań swobodnych ma postać

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \tag{22}$$

całek szczególnych równania poszukujemy w postaci $q = e^{rt}$. Po podstawieniu otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$mr^2 + cr + k = 0 \tag{23}$$

$$\Delta = c^2 - 4mk = c^2 - \frac{4m^2k}{m} = 4m^2(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}) = 4m^2\left[\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right] \tag{24}$$

przyjmując, że $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\Delta = 4m^2\left[\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2\right] \tag{25}$$

Drgania swobodne (1)

które posiada dwa pierwiastki

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{2m} = \frac{-c \pm 2m\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{26}$$

Otrzymane pierwiastki równania (22) mogą być liczbami rzeczywistymi różnymi, równymi lub liczbami zespolonymi.

Tłumienie krytyczne

Jeśli $c = 2m\omega_0$ wówczas otrzymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste

$$r_{1,2} = -\omega_0 \tag{27}$$

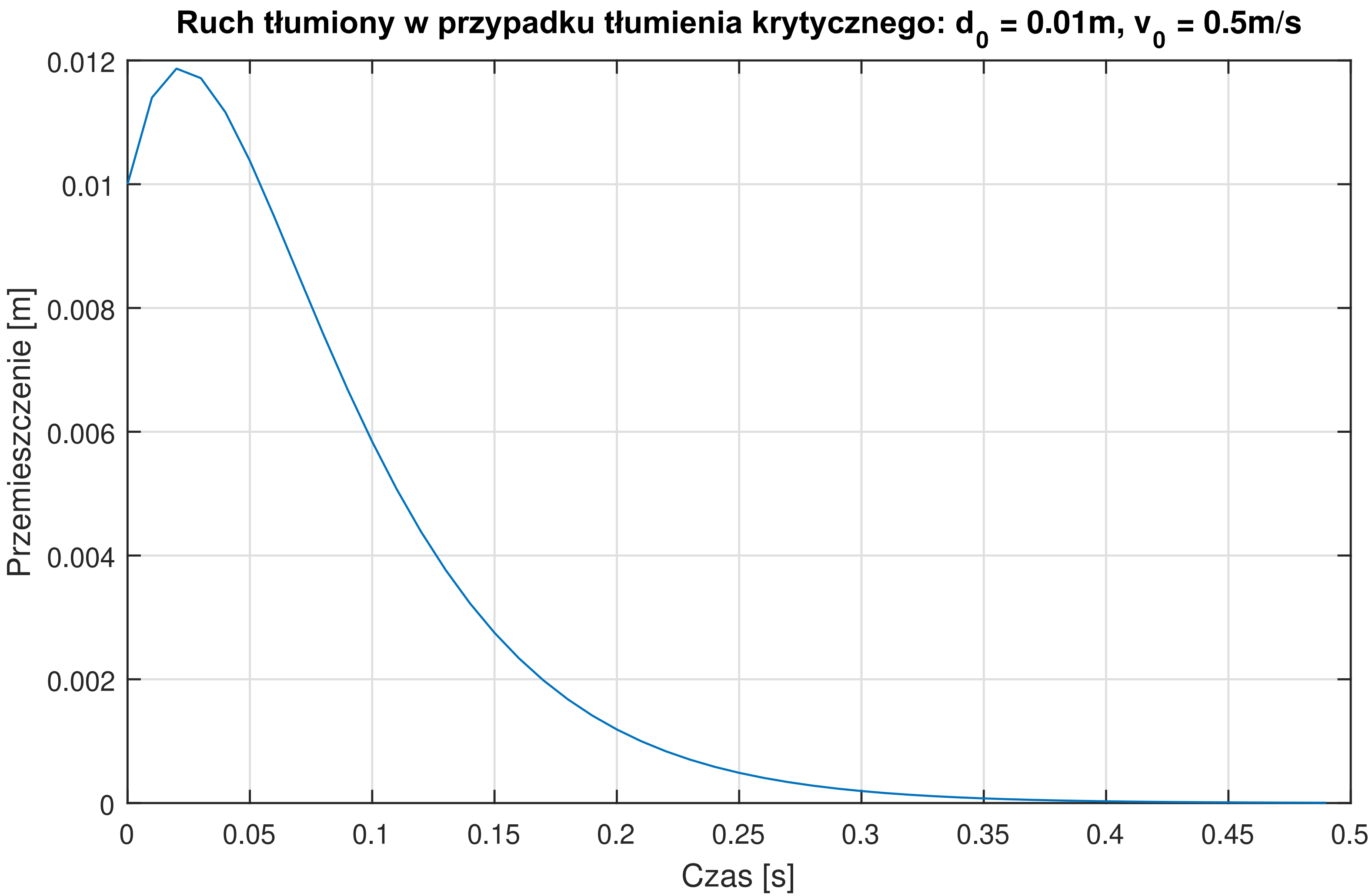
a całka ogólna równania (22) przyjmuje postać

$$q(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_0 t} \tag{28}$$

która po obliczeniu stałych z warunków początkowych jest w postaci

$$q(t) = \left[q_0(1 + \omega_0 t) + \dot{q}_0 t\right] e^{-\omega_0 t} \tag{29}$$

Wykres całki ogólnej (29) przedstawia się następująco



Ponieważ zarówno funkcja (29) jak i wykres wskazują na brak drgań, dlatego mamy do czynienia z tłumieniem krytycznym, co zapisujemy następująco

$$c_k = 2 m \omega_0 \tag{30}$$

Tłumienie krytyczne c_k wyznacza granicę między ruchem drgającym i niedrgającym (monotonicznie malejącym do zera)

Tłumienie podkrytyczne

Tłumienie podkrytyczne jest wtedy gdy $c < c_k$. Wówczas dogodnie jest wprowadzić bezwymiarowy parametr tłumienia jako iloraz

$$\xi = \frac{c}{c_k} = \frac{c}{2m\omega_0} \tag{31}$$

Tak zdefiniowany parametr ξ nazywamy liczbą tłumienia albo ułamkiem tłumienia krytycznego.
Ponieważ $c = 2m\xi\omega_0$ mamy

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-2m\xi\omega_0}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{2m\xi\omega_0}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2} \\ &= -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{-(1-\xi^2)} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \end{aligned} \tag{32}$$

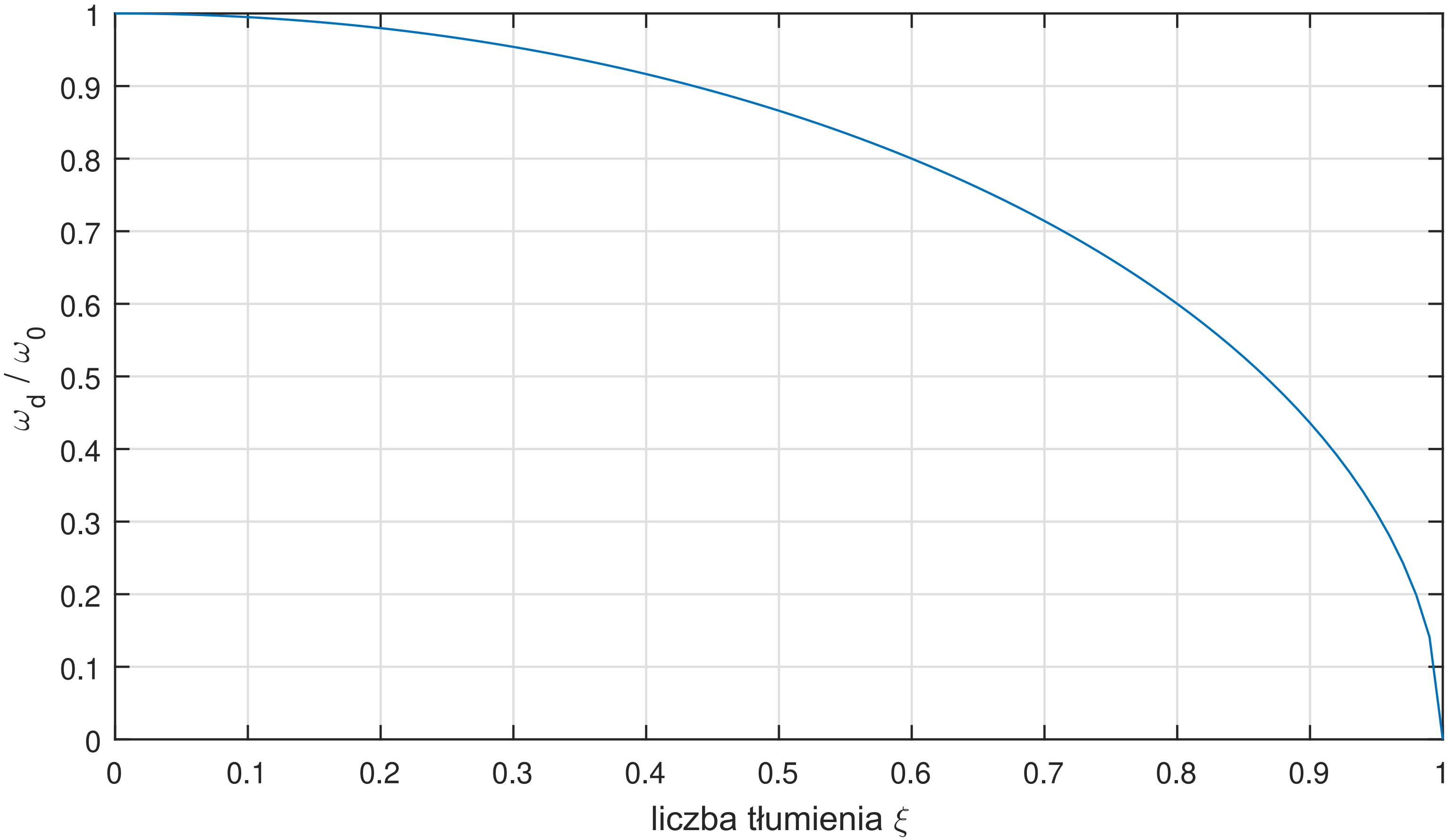
przyjmując, że

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \tag{33}$$

równanie charakterystyczne (23) dla $\xi < 1$ ma dwa pierwiastki zespolone sprzężone

$$r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_d \tag{34}$$

Wielkość ω_d nazywa się częstością kołową drgań tłumionych. Dla konstrukcji budowlanych liczba tłumienia ξ jest znacznie mniejsza od jedności i jest w granicach kilku procent (1-10%). Z tego względu wielkość ω_d niewiele różni się od ω_0.
Wykres ilorazu ω_d/ω_0 pokazano poniżej



Drgania swobodne (2)

całka ogólna równania ruchu jest w postaci

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(c_1 \sin\omega_d t + c_2 \cos\omega_d t)$$

stałe c_1 i c_2 wyznaczamy z warunków początkowych $q(0) = q_0$ i $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Wyrażenie na prędkość ma postać

$$\dot{q}(t) = -\xi\omega_0 \cdot e^{-\xi\omega_0 t}(c_1 \sin\omega_d t + c_2 \cos\omega_d t) + e^{-\xi\omega_0 t}(c_1\omega_d \cos\omega_d t - c_2\omega_d \sin\omega_d t)$$

z przemieszczenia początkowego mamy

$$q(0) = c_2 = q_0$$

z prędkości początkowej mamy

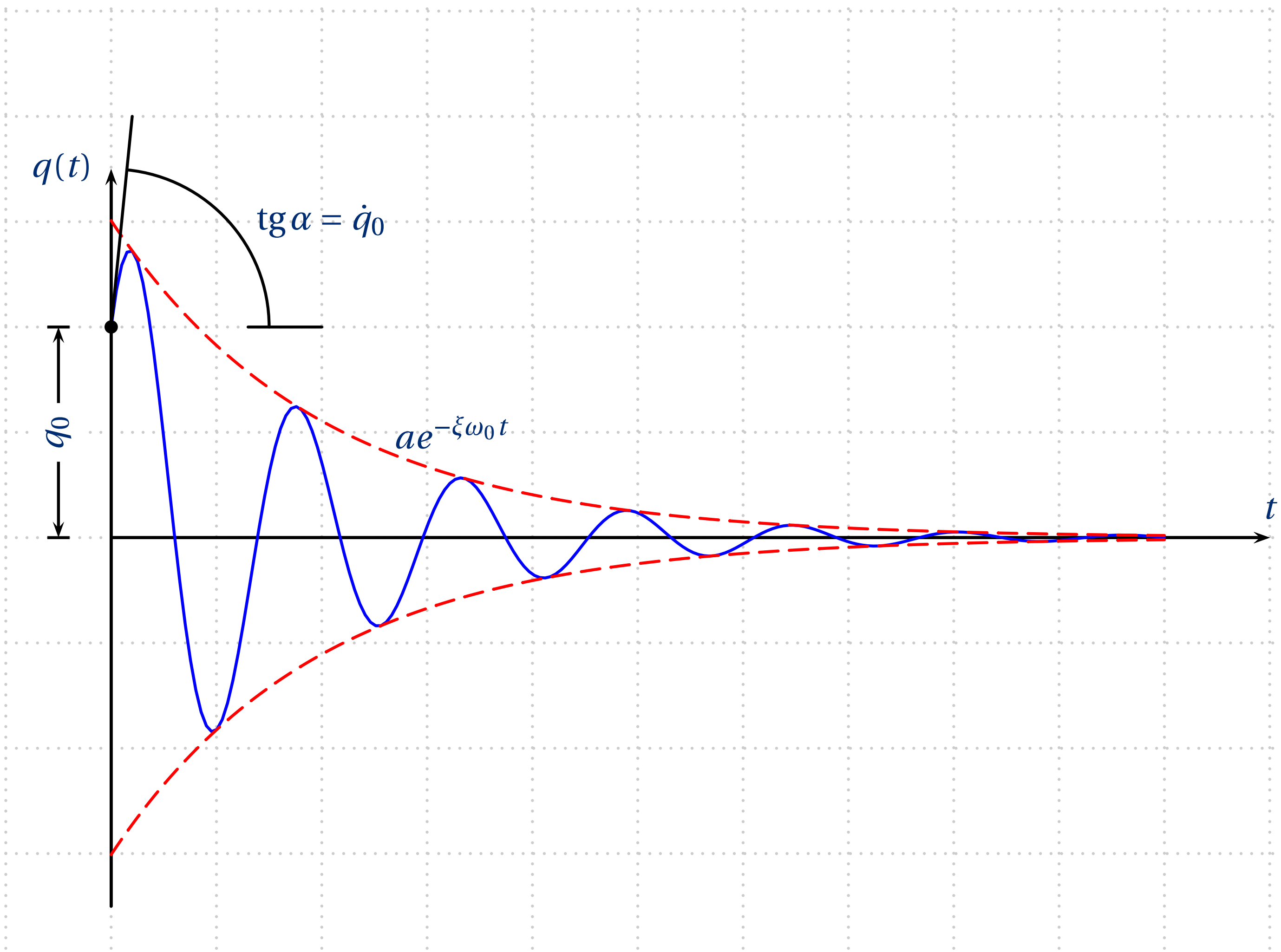
$$\dot{q}(0) = -\xi\omega_0 \cdot c_2 + c_1\omega_d = \dot{q}_0$$

$$c_1\omega_d = \dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0$$

$$c_1 = \frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}$$

ostatecznie równanie drgań swobodnych jest w postaci

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) \tag{35}$$



postać amplitudowa

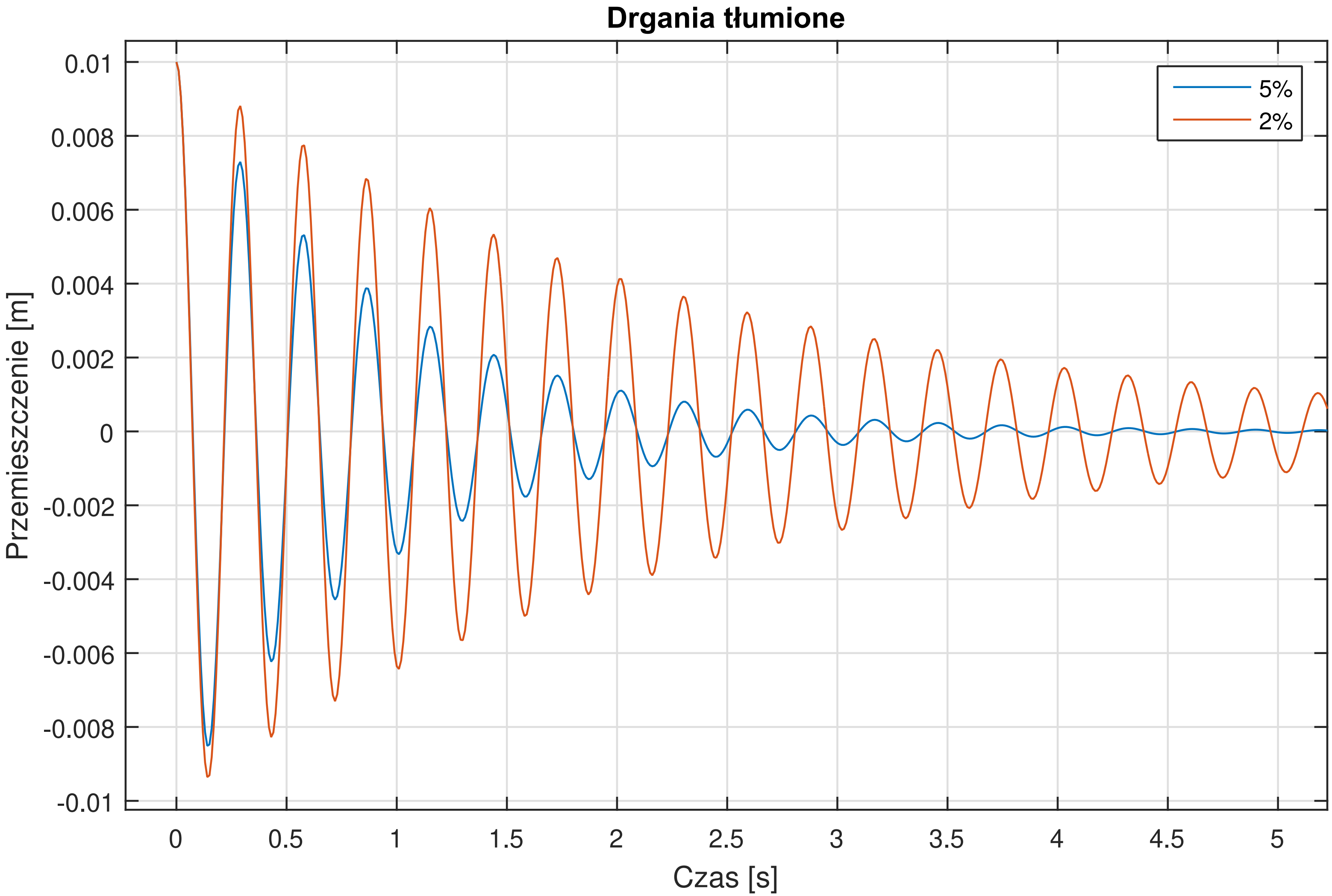
$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t} a \sin(\omega_d t + \varphi) \tag{36}$$

gdzie

$$a = \sqrt{\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\right)^2 + q_0^2} \tag{37}$$

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\omega_d q_0}{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0} \tag{38}$$

Przykład drgań swobodnych słupa wspornikowego o takiej samej sztywności k ale różnym tłumieniu: dla betonu $\xi = 0.05$, dla stali $\xi = 0.02$.
Warunki początkowe $d_0 = 0.01\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$



Logarytmiczny dekrement tłumienia

Mając na uwadze, że $T_d = 2\pi/\omega_d$

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{q(t)}{q(t+T_d)} = \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{e^{-\xi\omega_0(t+T_d)}} = e^{2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_d}} \tag{39}$$

Bezwymiarową wielkość

$$\Delta = \ln\frac{q_n}{q_{n+1}} = 2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_d} \tag{40}$$

nazywamy **logarytmicznym dekrementem tłumienia**. Dla małego tłumienia $\omega_d \approx \omega_0$ stąd

$$\Delta \approx 2\pi\xi \tag{41}$$

Wówczas iloraz (39) można przedstawić w postaci szeregu

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} \approx e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \ldots \tag{42}$$

Dla małych wartości ξ wystarczającą dokładność uzyska się jeśli uwzględni się tylko dwa pierwsze wyrazy szeregu, czyli

$$\xi = \frac{q_n - q_{n+1}}{2\pi q_{n+1}} \tag{43}$$

Dla układów o małym tłumnieniu, większą dokładność uzyska się przez obliczenie dekrementu tłumienia po m cyklach, czyli

$$\Delta m = \ln \frac{q_n}{q_{n+m}} = 2m\pi\xi \frac{\omega}{\omega_d} \tag{44}$$

Można więc zastosować przybliżoną zależność na obliczenie liczby tłumienia

$$\xi = \frac{q_n - q_{n+m}}{2m\pi q_{n+m}} \tag{45}$$

Drgania swobodne - równoważne r. ruchu

Równanie ruchu drgań swobodnych można zapisać też w innej postaci wychodząc z równania

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0| : m$$

które po podzieleniu obustronnym przez masę m daje

$$\ddot{q} + \frac{c}{m}\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{2\omega_0 c}{2m\omega_0}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

następnie uwzględniając, że $c/(2m\omega_0) = \xi$ otrzymamy równanie w postaci

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{46}$$

Drgania wymuszone harmonicznie bez tłum.?

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(c_1 \sin\omega_d t + c_2 \cos\omega_d t) + \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\cdot[(1-\beta^2)\sin pt - 2\xi\beta\cos pt]$$

$$q(0) = q_0 = c_2 + \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\cdot(-2\xi\beta)$$

$$c_2 = q_0 + 2\xi\beta\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

Drgania wymuszone harmonicznie z tłum.?

$$\dot{q}(t) = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}(c_1 \sin\omega_d t + c_2 \cos\omega_d t) + e^{-\xi\omega_0 t}(c_1\omega_d \cos\omega_d t - c_2\omega_d \sin\omega_d t)$$

$$+ \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \cdot (1-\beta^2)p =$$

$$\dot{q}_0 - \xi\omega_0 \cdot (q_0 + 2\xi\beta)\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} + c_1\omega_d +$$

$$\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \cdot (1-\beta^2)p = \dot{q}_0$$

$$c_1 = \frac{\dot{q}_0 + \xi\omega_0(q_0 + 2\xi\beta\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}) - \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \cdot (1-\beta^2)p}{\omega_d}$$

Drgania swobodne (Free damped vibrations)

Drgania swobodne (Free damped vibrations)

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{47}$$

Drgania swobodne (Free damped vibrations)

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{47}$$

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) \tag{48}$$

Drgania swobodne (Free damped vibrations)

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{47}$$

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) \tag{48}$$

ξ – liczba (ułamek) tłumienia (damping ratio)

$$\xi = \frac{c}{c_k} = \frac{c}{2m\omega_0} \tag{49}$$

Drgania swobodne (Free damped vibrations)

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{47}$$

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) \tag{48}$$

ξ – liczba (ułamek) tłumienia (damping ratio)

$$\xi = \frac{c}{c_k} = \frac{c}{2m\omega_0} \tag{49}$$

c – tłumienie podkrytyczne (under critical damping)
c_k – tłumienie krytyczne to granica między ruchem drgającym i niedrgającym (critical damping - limit between vibration and non-vibration)

$$c_k = 2m\omega_0 \tag{50}$$

Drgania swobodne (Free damped vibrations)

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{47}$$

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) \tag{48}$$

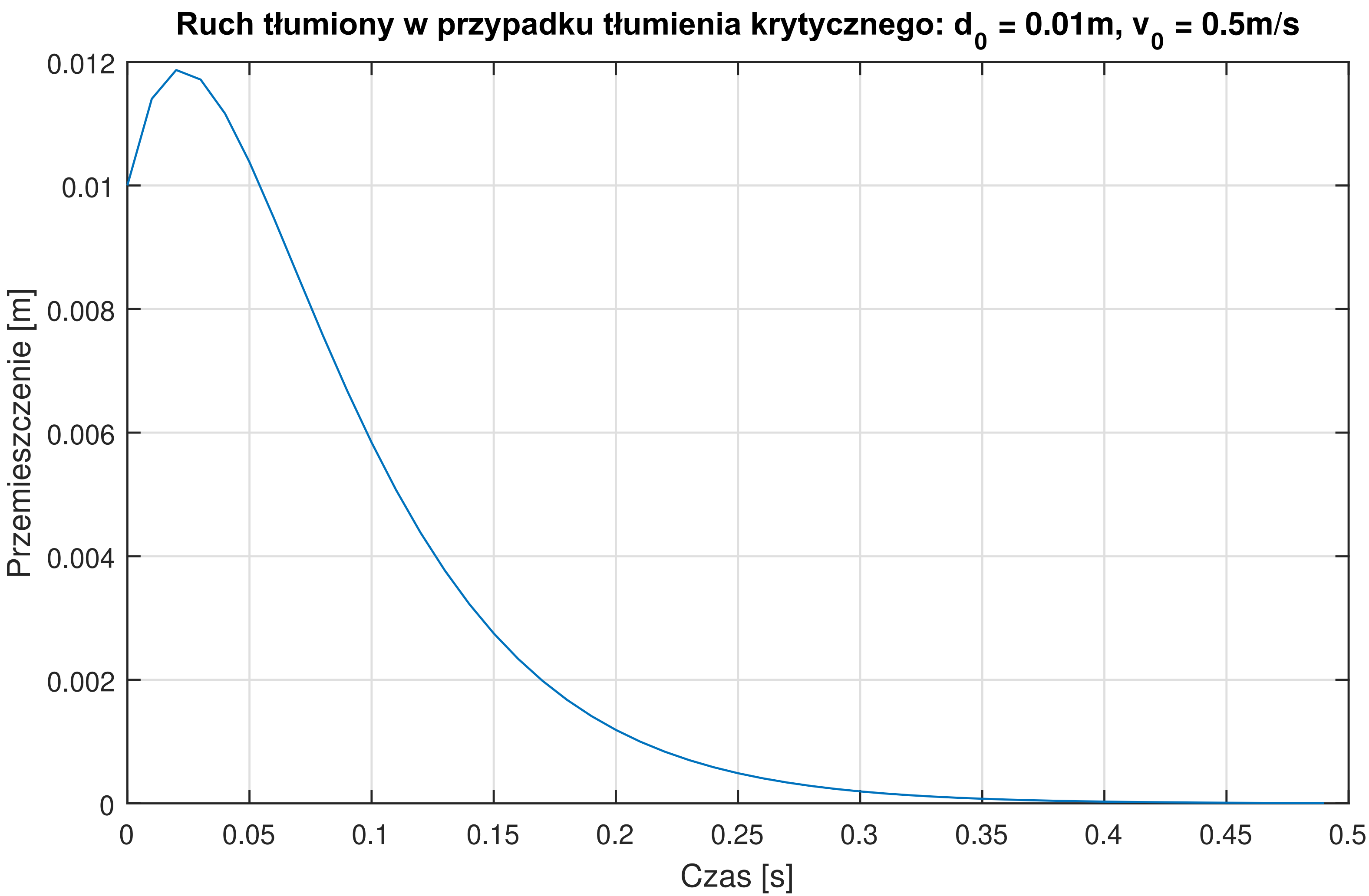
ξ – liczba (ułamek) tłumienia (damping ratio)

$$\xi = \frac{c}{c_k} = \frac{c}{2m\omega_0} \tag{49}$$

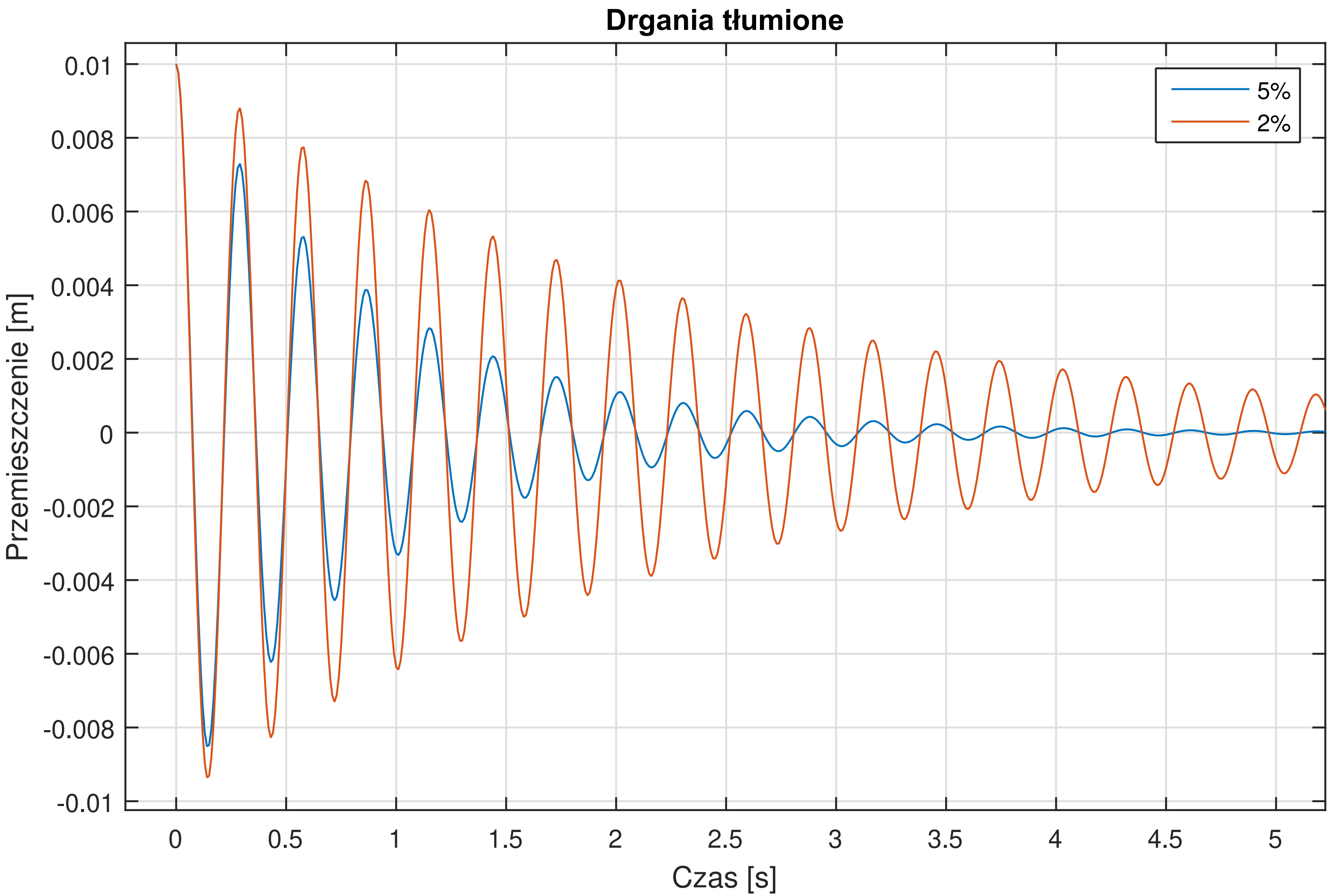
c – tłumienie podkrytyczne (under critical damping)
c_k – tłumienie krytyczne to granica między ruchem drgającym i niedrgającym (critical damping - limit between vibration and non-vibration)

$$c_k = 2m\omega_0 \tag{50}$$

Drgania swobodne z tłumieniem krytycznym $\xi = 1.0$ Warunki początkowe $d_0 = 0.01\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0.5\,\mathrm{m/s}$



Drgania swobodne z tłumieniem $\xi = 0.05$ i $\xi = 0.02$. Warunki początkowe $d_0 = 0.01\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$

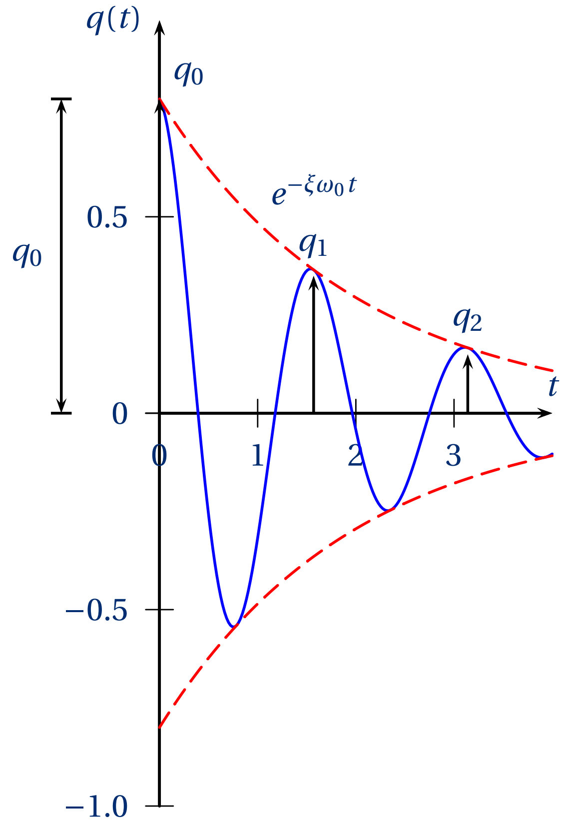


Δ - logarytmiczny dekrement tłumienia (logarithmic decrement of damping)

$$\Delta = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} \approx 2\pi\xi \tag{51}$$

Δ - logarytmiczny dekrement tłumienia (logarithmic decrement of damping)

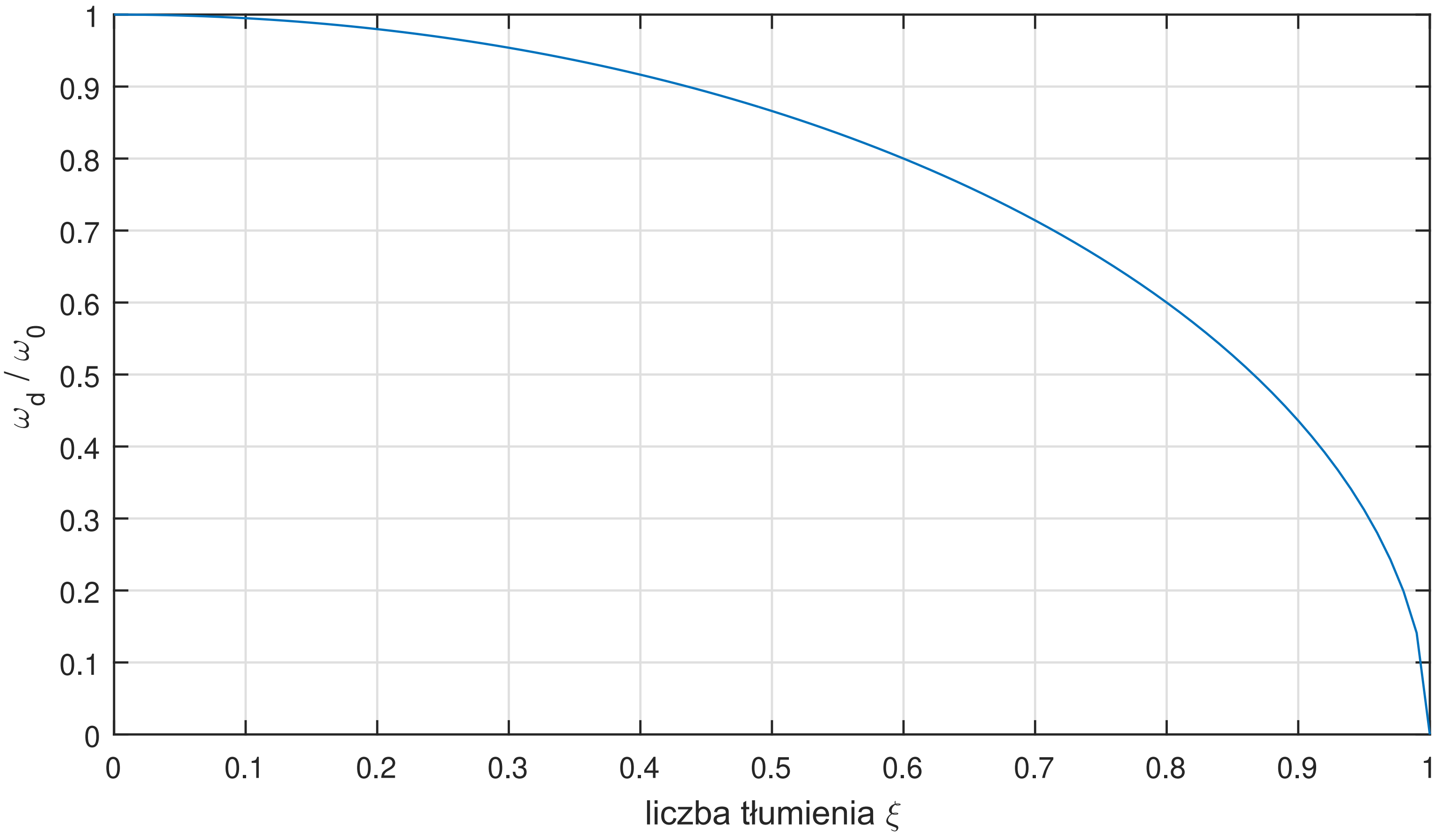
$$\Delta = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} \approx 2\pi\xi \tag{51}$$



$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \tag{52}$$

dla małego tłumienia (do 10%) można przyjąć, że $\omega_d = \omega_0$

zależność $\dfrac{\omega_d}{\omega_0}$ od ξ, gdzie $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$



Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Powtórzenie

- tłumienie krytyczne
- liczba tłumienia
- ruchu układu można opisać za pomocą jednej współrzędne uogólnionej
- obciążenie dynamiczne: zmienia się kierunek zwrot
- siła wymuszająca zależna tylko od czasu

Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania własne

$$\begin{cases} m\ddot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{53}$$

Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania własne

$$\begin{cases} m\ddot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{53}$$

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + q_0 \cos \omega_0 t = a \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{54}$$

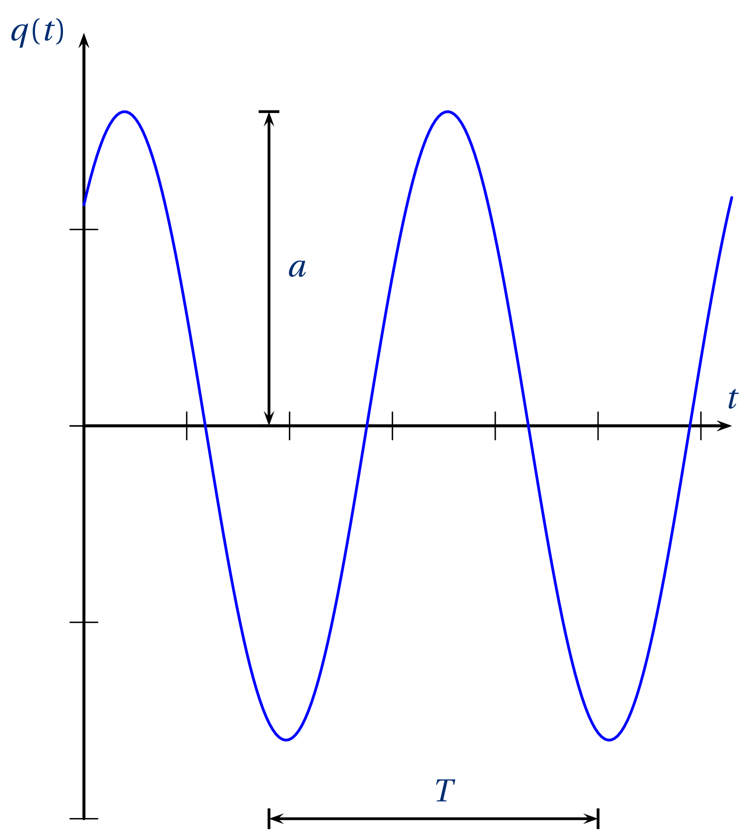
Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania własne

$$\begin{cases} m\ddot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{53}$$

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + q_0 \cos \omega_0 t = a \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{54}$$

parametry: ω_0, T, f



Drgania swobodne

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{55}$$

Drgania swobodne

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{55}$$

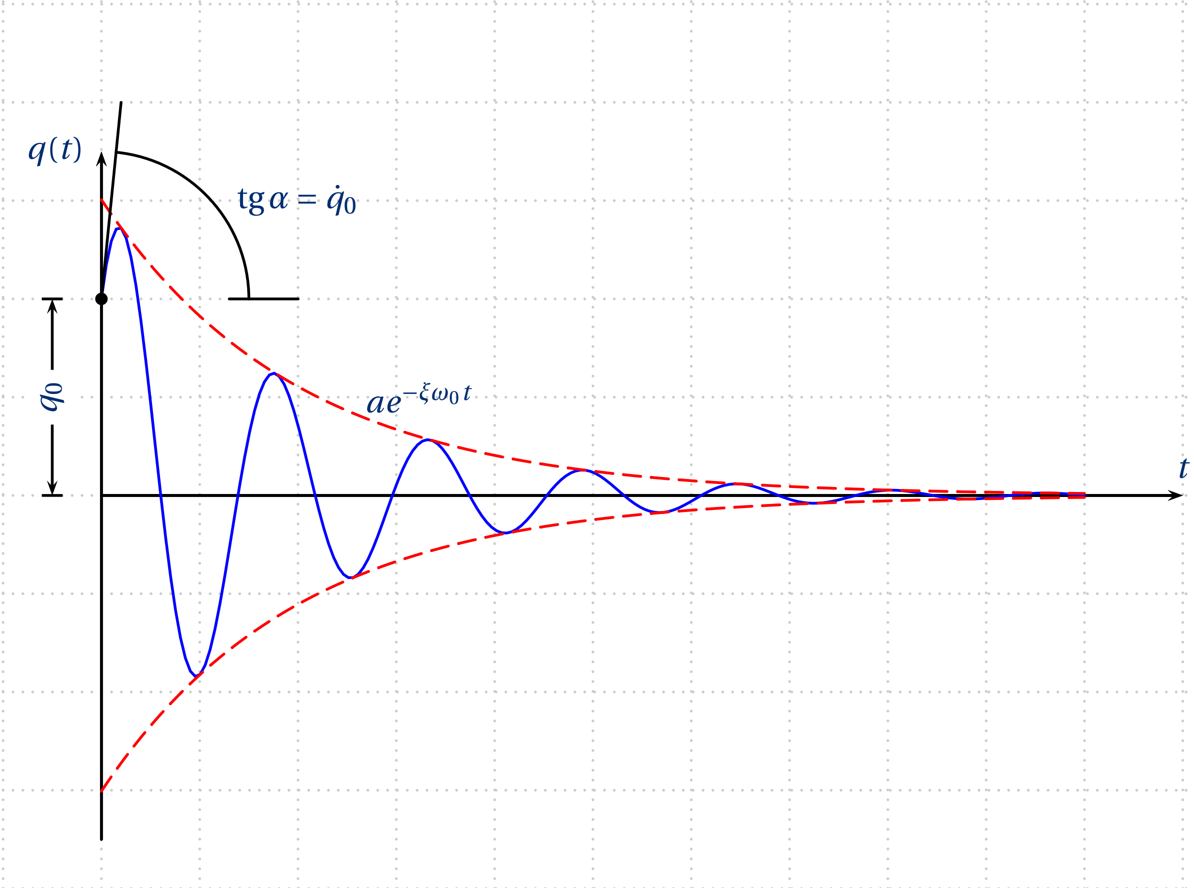
$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) \tag{56}$$

Drgania swobodne

$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{55}$$

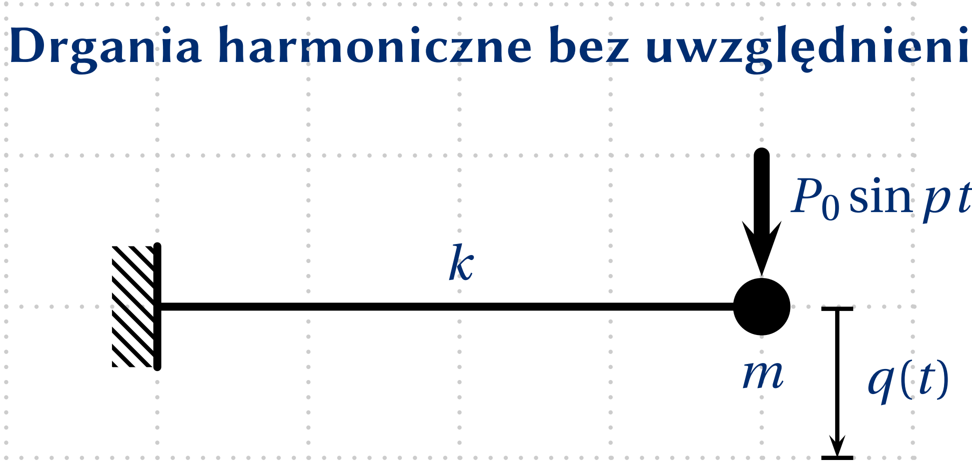
$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) \tag{56}$$

parametry: ω_d, T_d, f_d, Δ, ξ, c, c_k.



Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania harmoniczne bez uwzględnienia tłumienia



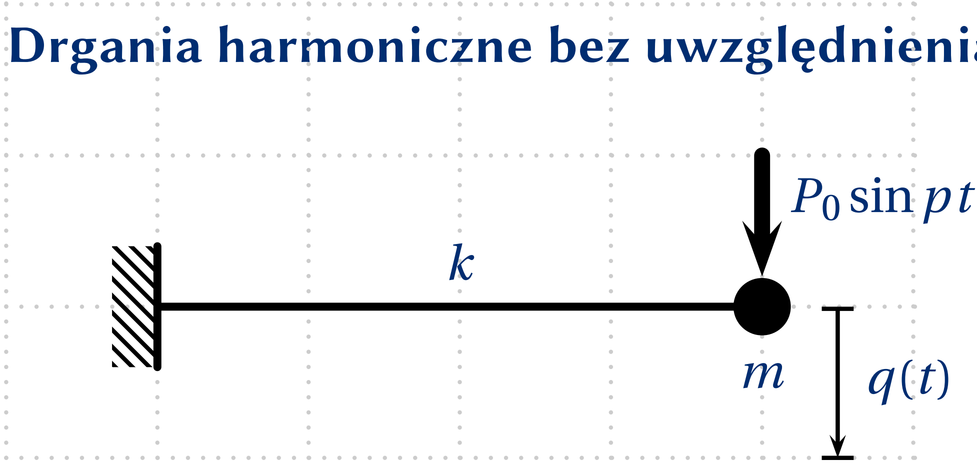
$$\begin{cases} m\ddot{q} + \cancel{c\dot{q}} + kq = P_0 \sin pt \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{57}$$

$$q(t) = \underbrace{\frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + q_0 \cos \omega_0 t - \beta \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \omega_0 t}_{\text{RORJ}} + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin pt}_{\text{RSRN}} \tag{58}$$

gdzie $\beta = \dfrac{p}{\omega_0}$

Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania harmoniczne bez uwzględnienia tłumienia



$$\begin{cases} m\ddot{q} + \cancel{c\dot{q}} + kq = P_0 \sin pt \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{57}$$

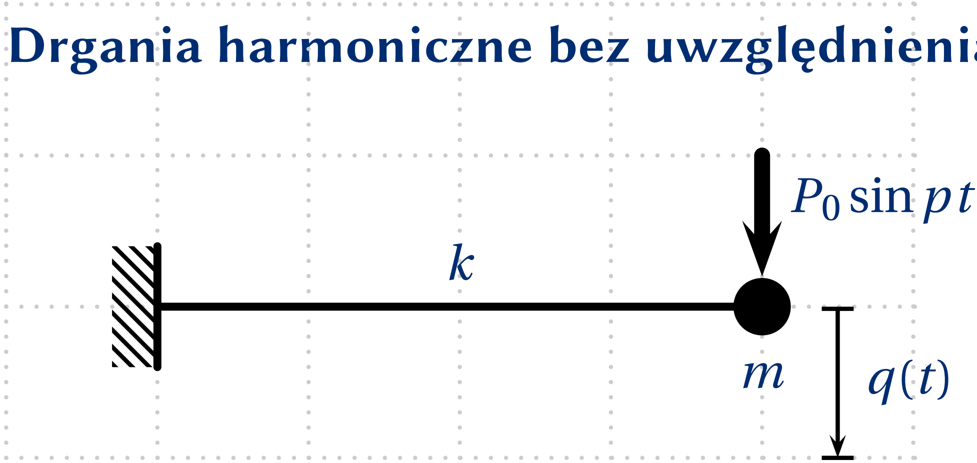
$$q(t) = \underbrace{\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + q_0\cos\omega_0 t - \beta\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\omega_0 t}_{\text{RORJ}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin pt}_{\text{RSRN}} \tag{58}$$

gdzie $\beta = \dfrac{p}{\omega_0}$

$$q(t) = q^{\text{ogólne}}(t) + q^{\text{szczeg.}}(t) \tag{59}$$

Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania harmoniczne bez uwzględnienia tłumienia



$$\begin{cases} m\ddot{q} + \cancel{c\dot{q}} + kq = P_0 \sin pt \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{57}$$

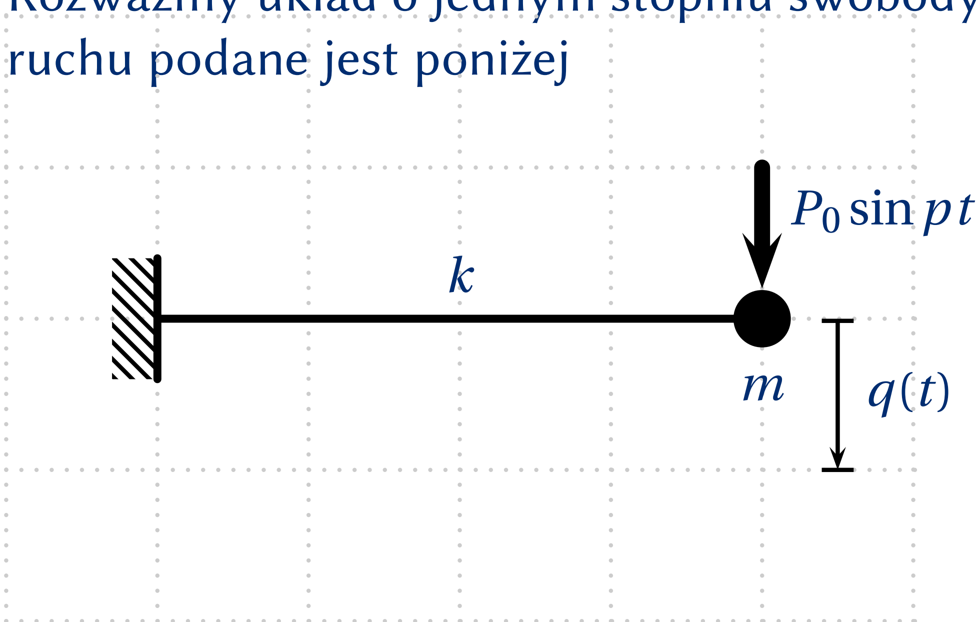
$$q(t) = \underbrace{\frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + q_0 \cos \omega_0 t - \beta \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \omega_0 t +}_{\text{RORJ}} \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin pt}_{\text{RSRN}} \tag{58}$$

gdzie $\beta = \dfrac{p}{\omega_0}$

$$q(t) = q^{\text{ogólne}}(t) + q^{\text{szczeg.}}(t) \tag{59}$$

Drgania harmoniczne bez uwzględnienia tłumienia - wyprowadzenie

Rozważmy układ o jednym stopniu swobody jak na rysunku, którego równanie ruchu podane jest poniżej



$$m\ddot{q} + kq = P_0 \sin pt \tag{60}$$

Całka ogólna równania jednorodnego jak w drganiach swobodnych, natomiast całkę szczególną przewidujemy jako

$$q(t) = G \sin pt \tag{61}$$

gdzie amplitudę G należy wyznaczyć. Podstawiając powyższą zależność i jej drugą pochodną do równania ruchu (60) otrzymamy

$$-mp^2 G \sin pt + kG \sin pt = P_0 \sin pt \tag{62}$$

Dzieląc obustronnie przez $\sin pt$ otrzymamy

$$(-mp^2 + k)G = P_0 \tag{63}$$

Po podstawieniu $k/m = \omega_0^2$ i wprowadzeniu oznaczenia $p/\omega_0 = \beta$ otrzymamy

$$G = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2} \tag{64}$$

Ogólne rozwiązanie równania ruchu (60) ma postać

$$q(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin p t \tag{65}$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych stałe C_1 i C_2 są równe

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \beta \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \\ C_2 = q_0 \end{cases} \tag{66}$$

Ostatecznie więc rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned} q(t) = {} & \underbrace{\frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + q_0 \cos \omega_0 t - \beta \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \omega_0 t +}_{\text{RORJ}} \\ & \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin p t}_{\text{RSRN}} \end{aligned} \tag{67}$$

gdzie $\beta = \dfrac{p}{\omega_0}$

Analiza wzoru

$$q(t) = \underbrace{\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + q_0\cos\omega_0 t - \beta\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\omega_0 t}_{\text{RORJ}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin pt}_{\text{RSRN}} \tag{68}$$

Rozwiązanie składa się z trzech części.

- Pierwsza część (zawierająca dwa składniki) przedstawia drgania własne wynikające z warunków początkowych.
- Część druga przedstawia drgania o częstości własnej (ω_0). Drgania te są niezależne od warunków początkowych, a zależą jedynie od amplitudy i częstości siły wymuszającej p.
- Część trzecia przedstawia drgania z częstością siły wymuszającej p.

Trzy pierwsze składniki przedstawiają ruch harmoniczny z częstością drgań własnych ω_0, podobnie czwarty składnik przedstawia ruch harmoniczny jednak z częstością p. Odpowiedź jest sumą drgań harmonicznych o różnych częstościach i w ogólnym przypadku wypadkowy ruch nie jest harmoniczny.

W praktycznych przypadkach, w których uwzględniamy wpływ tłumienia, składniki reprezentujące drgania własne zanikną, dlatego opisują proces przejściowy (drgania nieustalone).
Analiza drgań ustalonych z częstością siły wymuszającej

$$q(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin pt \tag{69}$$

Wielkość $\frac{P_0}{k}$ to ugięcie statyczne układu wywołane siłą P_0 przyłożoną w sposób statyczny.

$$q_{st} = \frac{P_0}{k} \tag{70}$$

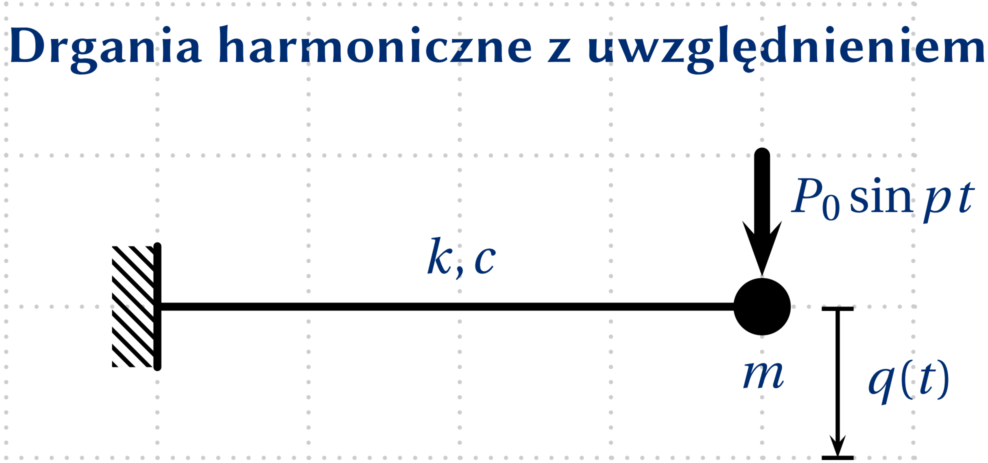
Z kolei wielkość

$$\rho = \frac{1}{1-\beta^2} \tag{71}$$

mówi w jakim stopniu efekt dynamiczny jest większy w stosunku do efektu statycznego. Wyrażenie to nazywamy **współczynnikiem dynamicznym**, współczynnikiem wzmocnienia lub zwielokrotnienia drgań i oznaczmy jako ρ.

Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Drgania harmoniczne z uwzględnieniem tłumienia

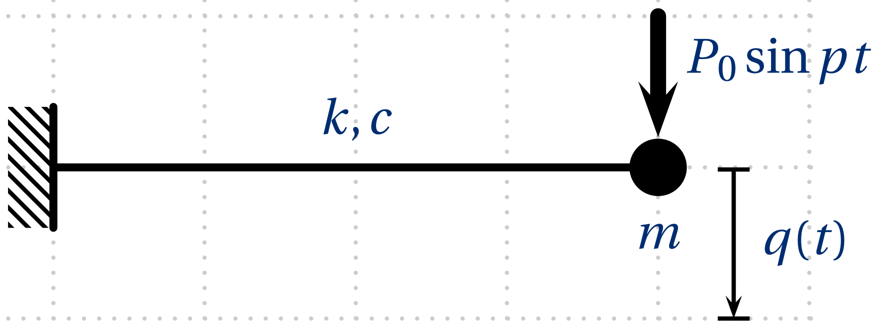


$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = P_0 \sin pt \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{72}$$

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_0 t) + \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ [(1-\beta^2)\sin pt - 2\xi\beta\cos pt] \tag{73}$$

Drgania harmoniczne z uwzględnieniem tłumienia - wyprowadzenie

Analizujemy następujący układ o jednym stopniu swobody



- równanie ruchu

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = P_0 \sin pt \tag{74}$$

Dzieląc obustronnie przez m i uwzględniając wzory na ω_0 i ξ otrzymujemy alternatywne równanie ruchu

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{P_0}{m} \sin pt \tag{75}$$

Całka ogólna równania jednorodnego jest funkcją zanikającą jak w drganiach swobodnych. Całka szczególna równania niejednorodnego przewidywana jest w postaci

$$q(t) = G_1 \sin pt + G_2 \cos pt \tag{76}$$

Po podstawieniu powyższej zależności i jej pierwszej i drugiej pochodnej do równania ruchu otrzymamy dwa równania algebraiczne dla $\sin pt$ i $\cos pt$ każdego osobno.

$$\begin{cases} -G_1 p^2 - G_2 2\xi\omega_0 p + G_1\omega_0^2 = \frac{P_0}{m} \\ -G_2 p^2 + G_1 2\xi\omega_0 p + G_2\omega_0^2 = 0 \end{cases} \tag{77}$$

po podzieleniu przez ω_0^2, wykorzystaniu $p/\omega_0 = \beta$ i uporządkowaniu składników otrzymamy

$$\begin{cases} G_1(1-\beta^2) - G_2 2\xi\beta = \frac{P_0}{k} \\ G_1 2\xi\beta + G_2(1-\beta^2) = 0 \end{cases} \tag{78}$$

po rozwiązaniu układu równań algebraicznych otrzymamy

$$\begin{cases} G_1 = \frac{P_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \\ G_2 = \frac{P_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \end{cases} \tag{79}$$

Po podstawieniu tych stałych do całki szczególnej i dołączeniu całki równania jednorodnego otrzymamy całkę ogólną równania niejednorodnego

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_0 t) + \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ [(1-\beta^2)\sin pt - 2\xi\beta\cos pt] \tag{80}$$

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_0 t) + \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \quad [(1-\beta^2)\sin pt - 2\xi\beta\cos pt] \tag{81}$$

Stałe C_1 i C_2 mogą być określone dla dowolnych warunków początkowych. Pierwsza część tego rozwiązania przedstawia proces przejściowy, który szybko zanika i dlatego można go pominąć w dalszych rozważaniach. Druga część reprezentuje drgania ustalone, które mają częstość siły wymuszającej i są przesunięte w fazie względem siły wymuszającej. Tę drugą część rozwiązania można przedstawić w formie zwiniętej

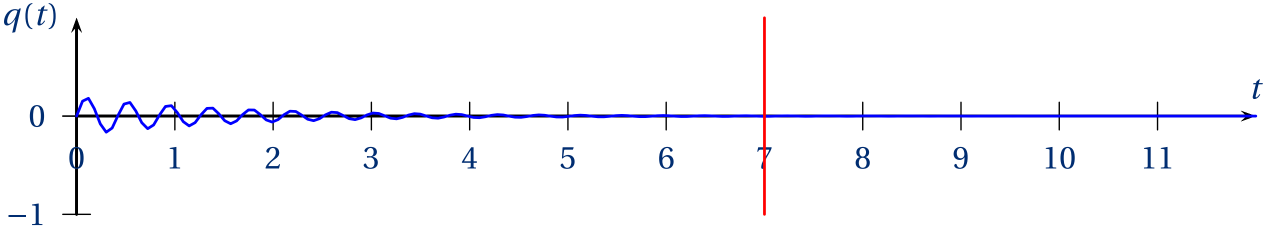
$$q(t) = \rho\frac{P_0}{k}\sin(pt-\varphi) \tag{82}$$

gdzie

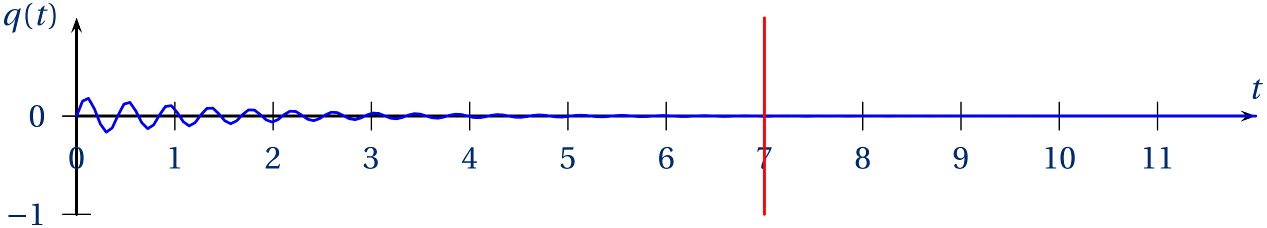
$$\rho = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \tag{83}$$

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \tag{84}$$

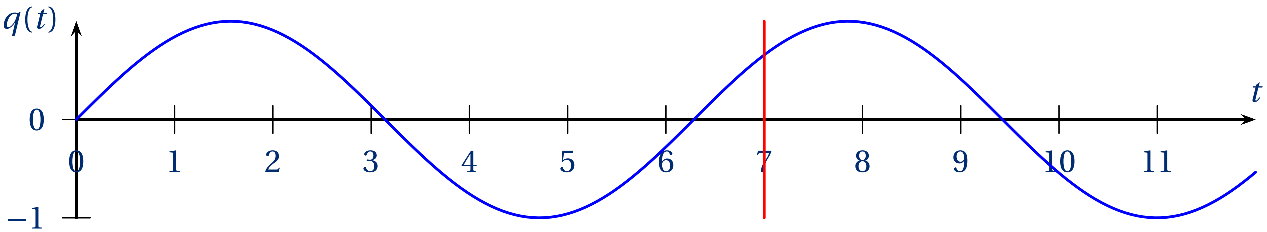
Drgania nieustalone to drgania spowodowane zaistnieniem warunków początkowych, natomiast drgania ustalone to drgania z częstością siły wymuszającej



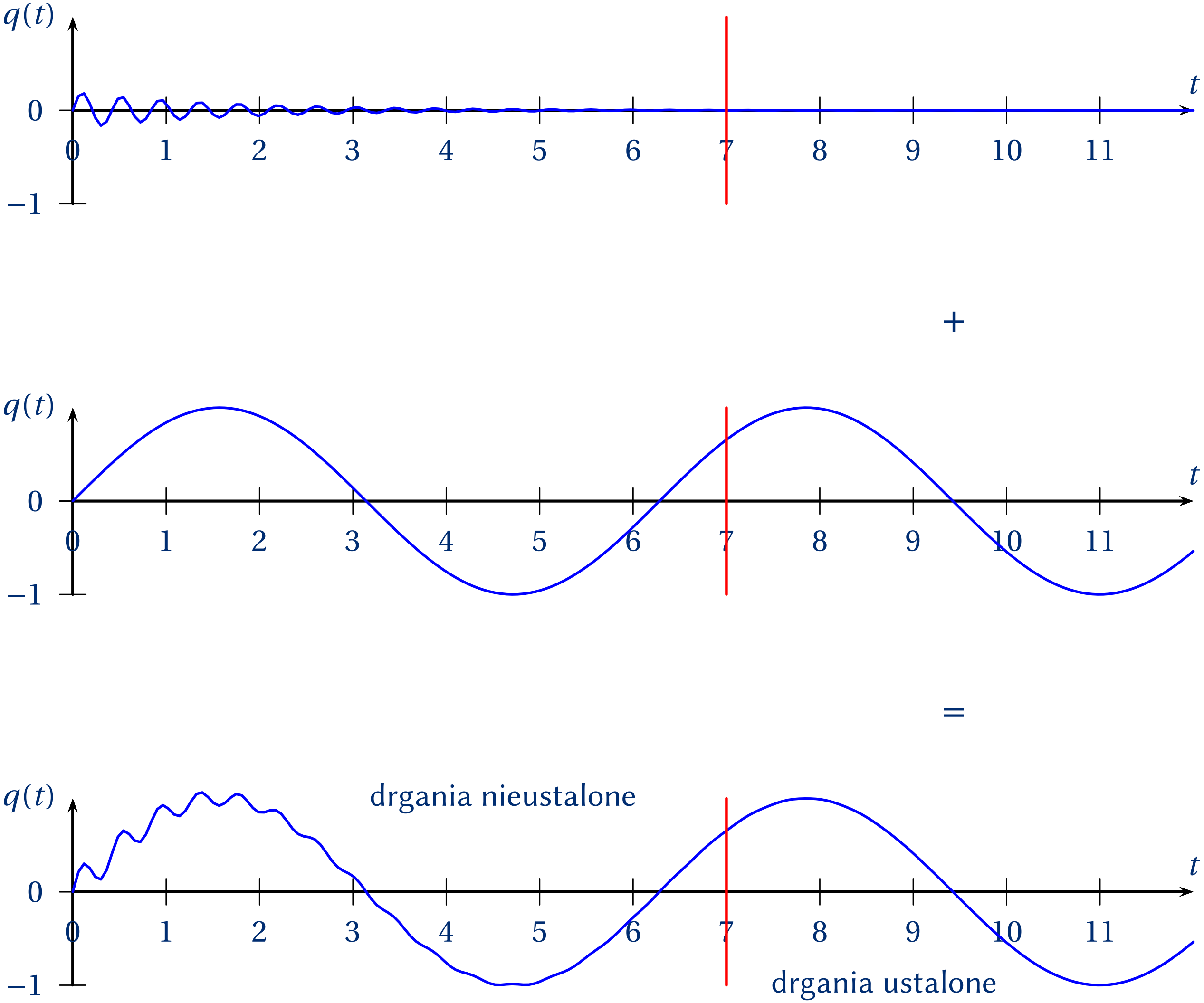
Drgania nieustalone to drgania spowodowane zaistnieniem warunków początkowych, natomiast drgania ustalone to drgania z częstością siły wymuszającej



+



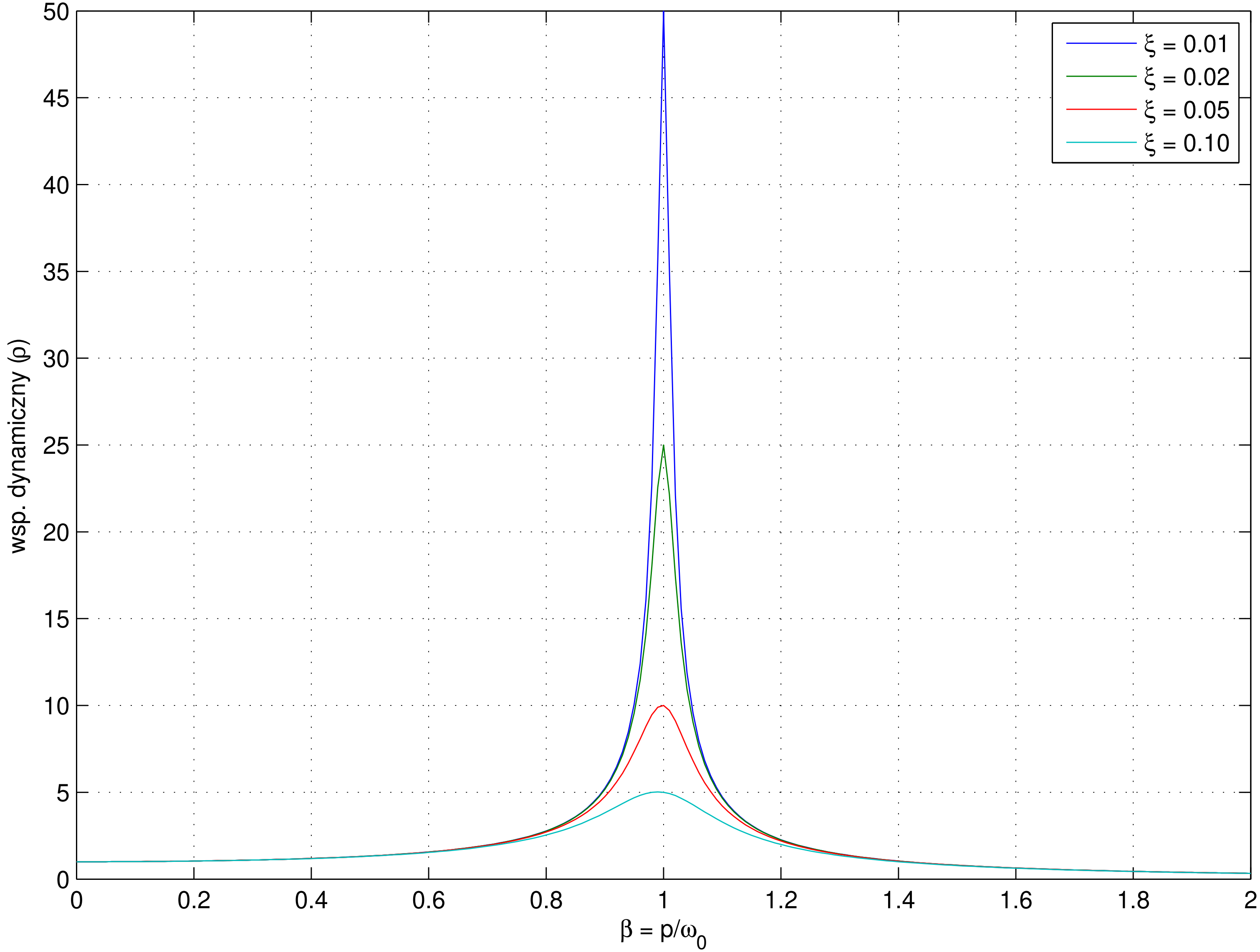
Drgania nieustalone to drgania spowodowane zaistnieniem warunków początkowych, natomiast drgania ustalone to drgania z częstością siły wymuszającej



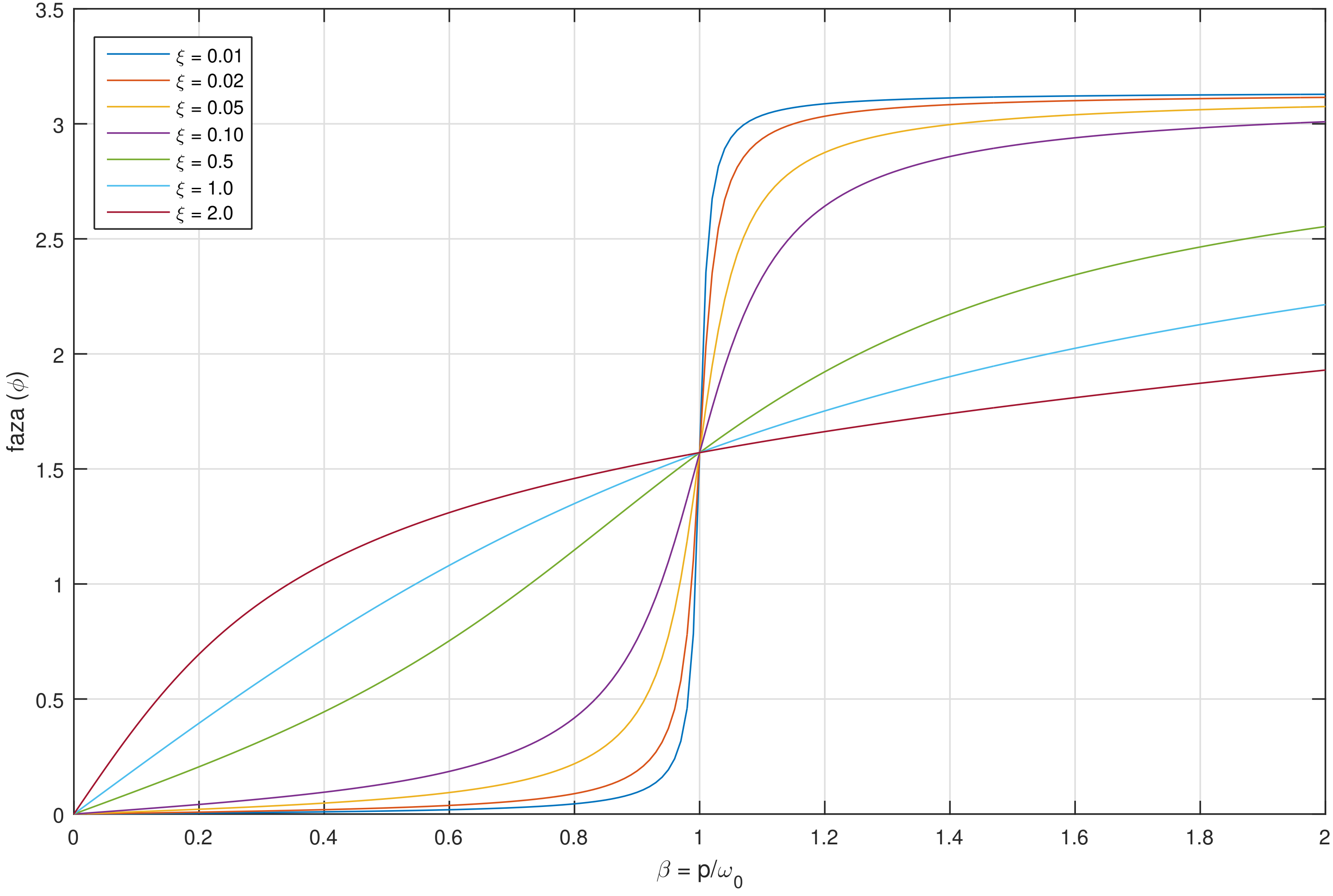
Przebieg czasowy przemieszczenia (82) jest także opisany funkcją harmoniczną, ale z opóźnieniem czasowym φ w stosunku do siły wymuszającej. Wielkość ρ nazywamy współczynnikiem dynamicznym drgań wymuszonych z uwzględnieniem tłumienia. Wykres dla różnych wartości liczby tłumienia ξ w zależności od $\beta = p/\omega_0$. (Wykres φ).

Rezonans – zjawisko zwielokrotnienia drgań, gdy częstość wymuszenia p zbliża się do częstości drgań własnych ω_0.

Wykres zależności β-ρ



Wykres zależności β-φ



Odp. układu o 1 DSS na wym. okresowe

Odpowiedź układu o jednym stopniu swobody na wymuszenie okresowe.
Siłę okresową oznacza się

$$P(t+T_p)=P(t) \tag{85}$$

Odpowiedź układu o jednym stopniu swobody na wymuszenie okresowe.
Siłę okresową oznacza się

$$P(t + T_p) = P(t) \tag{85}$$

gdzie T_p – okres siły wymuszającej
Wówczas siłę okresową można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(np_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(np_1 t) \tag{86}$$

Odpowiedź układu o jednym stopniu swobody na wymuszenie okresowe.
Siłę okresową oznacza się

$$P(t+T_p) = P(t) \tag{85}$$

gdzie T_p – okres siły wymuszającej
Wówczas siłę okresową można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(np_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(np_1 t) \tag{86}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt \tag{87}$$

Odpowiedź układu o jednym stopniu swobody na wymuszenie okresowe.
Siłę okresową oznacza się

$$P(t+T_p)=P(t) \tag{85}$$

gdzie T_p – okres siły wymuszającej
Wówczas siłę okresową można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(np_1t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(np_1t) \tag{86}$$

gdzie

$$a_0=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)dt \tag{87}$$

$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\cos(np_1t)dt,\quad n\neq 0 \tag{88}$$

Odpowiedź układu o jednym stopniu swobody na wymuszenie okresowe.
Siłę okresową oznacza się

$$P(t+T_p)=P(t) \tag{85}$$

gdzie T_p – okres siły wymuszającej
Wówczas siłę okresową można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(np_1t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(np_1t) \tag{86}$$

gdzie

$$a_0=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)dt \tag{87}$$

$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\cos(np_1t)dt,\quad n\neq 0 \tag{88}$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\sin(np_1t)dt,\quad p_1=\frac{2\pi}{T_p} \tag{89}$$

Odpowiedź układu o jednym stopniu swobody na wymuszenie okresowe.
Siłę okresową oznacza się

$$P(t+T_p) = P(t) \tag{85}$$

gdzie T_p – okres siły wymuszającej
Wówczas siłę okresową można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(np_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(np_1 t) \tag{86}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)dt \tag{87}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos(np_1 t)dt, \quad n \neq 0 \tag{88}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin(np_1 t)dt, \quad p_1 = \frac{2\pi}{T_p} \tag{89}$$

Okazuje się, że dla wielu przypadków praktycznych szereg (86) jest szybko zbieżny. Uwzględnienie kilka pierwszych składników tego szeregu daje dobre przybliżenie siły wymuszającej.
Całkowita odpowiedź układu jest równa sumie indywidualnych odpowiedzi
a) bez tłumienia

$$q(t) = \frac{1}{k}\left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\beta_n^2}\left[a_n \cos(np_1 t) + b_n \sin(np_1 t)\right]\right\} \tag{90}$$

Okazuje się, że dla wielu przypadków praktycznych szereg (86) jest szybko zbieżny. Uwzględnienie kilka pierwszych składników tego szeregu daje dobre przybliżenie siły wymuszającej.

Całkowita odpowiedź układu jest równa sumie indywidualnych odpowiedzi

a) bez tłumienia

$$q(t) = \frac{1}{k}\left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\beta_n^2}\left[a_n \cos(np_1 t) + b_n \sin(np_1 t)\right]\right\} \tag{90}$$

b) z uwzględnieniem tłumienia

$$\begin{aligned} q(t) =& \frac{1}{k}\left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\left[\left(a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)\right)\sin(np_1 t)\right.\right. \\ &\left.\left. + \left(a_n(1-\beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n\right)\cos(np_1 t)\right]\right\} \end{aligned} \tag{91}$$

Okazuje się, że dla wielu przypadków praktycznych szereg (86) jest szybko zbieżny. Uwzględnienie kilka pierwszych składników tego szeregu daje dobre przybliżenie siły wymuszającej.
Całkowita odpowiedź układu jest równa sumie indywidualnych odpowiedzi
a) bez tłumienia

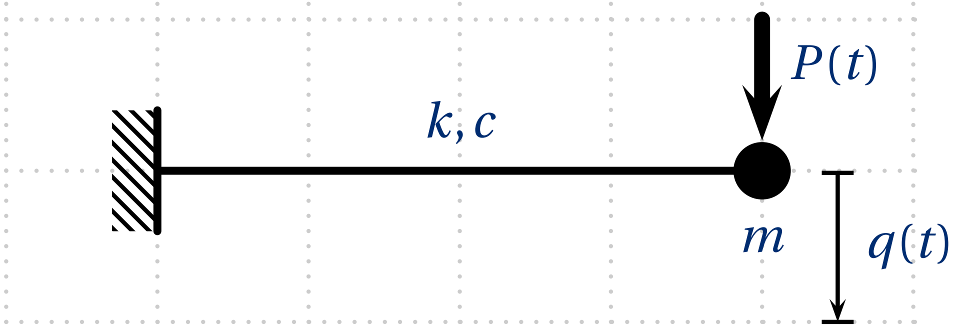
$$q(t) = \frac{1}{k}\left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\beta_n^2}\left[a_n \cos(np_1 t) + b_n \sin(np_1 t)\right]\right\} \tag{90}$$

b) z uwzględnieniem tłumienia

$$\begin{aligned} q(t) = & \frac{1}{k}\Bigg\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\Bigg[\Big(a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)\Big)\sin(np_1 t) \\ & + \Big(a_n(1-\beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n\Big)\cos(np_1 t)\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \tag{91}$$

Całka Duhamela - odp. na dowolne wymuszenie fun. czasu

Rozważmy układ o jednym stopniu swobody, na który działa siła wymuszająca $P(t)$ będąca dowolną funkcją czasu.



Równanie ruchu wraz z warunkami początkowymi wygląda następująco

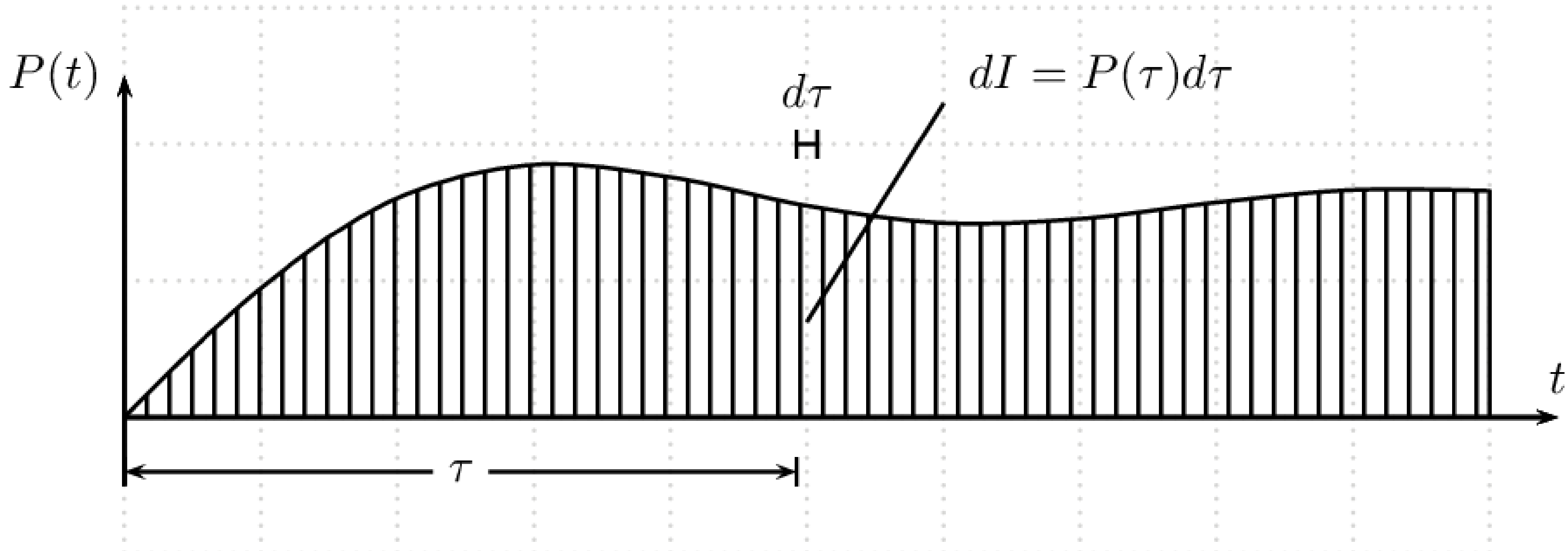
$$\begin{cases} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = P(t) \\ q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \tag{92}$$

Całkę ogólną z uwzględnieniem warunków początkowych można przedstawić w postaci

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\dot{q}_0 + q_0\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + q_0\cos\omega_0 t\right) + q^I(t) \tag{93}$$

gdzie $q^I(t)$ jest całką szczególną równania niejednorodnego. Można ją określić różnymi metodami, np.: metodą uzmienniania stałych, metodą transformacji Laplace'a oraz całką Duhamela (omówioną poniżej).

W metodzie przy użyciu całki Duhamela, nazwanej też metodą impulsowych funkcji przejścia, siłę wymuszającą przedstawiamy jako sumę elementarnych impulsów $dI = P(\tau)d\tau$, a rozwiązanie $q^I(t)$ jako superpozycję rozwiązań dla kolejnych wymuszeń impulsowych.



Wartością impulsu siły działającej w krótkim przedziale czasu (t_1, t_2) nazywamy całkę oznaczoną

$$I = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt \tag{94}$$

Średnią wartością impulsu tej siły w przedziale czasu Δt nazywamy wartość

$$P_{\text{śr}} = \frac{I}{\Delta t} \tag{95}$$

Gdy Δt dąży do zera, wartość tej siły rośnie nieograniczenie. Wówczas celowe jest przedstawienie siły impulsowej za pomocą funkcji uogólnionej nazwanej deltą Diraca lub impulsem jednostkowym. Wartość funkcji delta Diraca w pewnej określonej chwili czasu τ jest określona następująco

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0 \quad \text{dla} \quad t\neq\tau\\ \infty \quad \text{dla} \quad t=\tau\end{cases} \tag{96}$$

Istotną własnością całkową funkcji delty Diraca jest zależność

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)dt=1 \tag{97}$$

Poza tym, jeśli dowolną funkcję $q(t)$ ciągłą i ograniczoną pomnożymy przez funkcję delty Diraca, to całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(t)\delta(t-\tau)dt = q(\tau) \tag{98}$$

przedstawia wartość funkcji $q(t)$ w chwili τ.
Załóżmy, że układ dynamiczny opisany równaniem ruchu (92) (bez warunków początkowych - pozostawający w spoczynku) został poddany działaniu impulsu jednostkowego $I = 1$ w chwili $\tau = 0$. Impuls w czasie działania bliskim zeru powoduje nagły wzrost prędkości, która wynika z prawa zmienności pędu tj.

$$m\dot{q}(t = t_2) - m\dot{q}(t = t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = I \tag{99}$$

Drugi składnik wyrażenia (99) z lewej strony jest równy zeru. Tak więc działanie dużej siły w bardzo krótkim czasie jest równoważne nadaniu masie prędkości początkowej, czyli

$$\dot{q}(t = t_2) = \dot{q}_0(0^+) = \frac{I}{m} \tag{100}$$

Ruch układu po działaniu impulsu o wartości jednostkowej $I = 1$ w chwili $\tau = 0$ jest więc ruchem swobodnym wynikającym z rozwiązania następującego zagadnienia początkowego

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \tag{101}$$

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = \frac{I}{m} = \frac{1}{m} \tag{102}$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego nazywamy odpowiedzią impulsową, funkcją Greena lub najczęściej impulsową funkcją przejścia i oznaczamy jako $h(t)$
- dla układu tłumionego

$$h(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \\ \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\omega_d t \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{103}$$

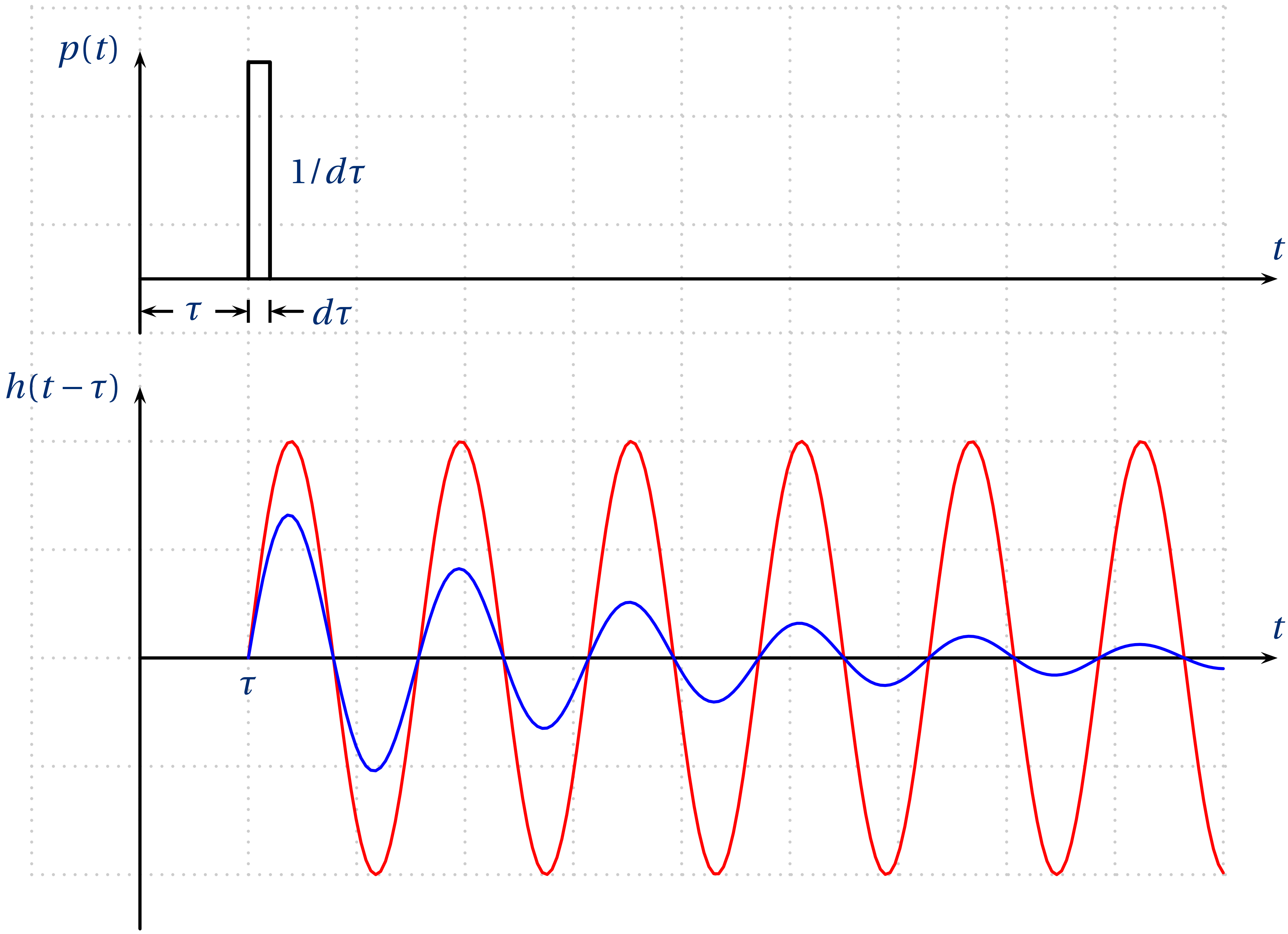
Rozwiązanie zagadnienia początkowego nazywamy odpowiedzią impulsową, funkcją Greena lub najczęściej impulsową funkcją przejścia i oznaczamy jako $h(t)$
- dla układu tłumionego

$$h(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \\ \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\omega_d t \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{103}$$

- dla układu nietłumionego

$$h(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \\ \frac{1}{m\omega_0} \sin\omega_0 t \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{104}$$

Na rysunku przedstawiono szkic funkcji delty Diraca i impulsowej funkcji przejścia. Działanie impulsu przyjęto w chwili $t = \tau$. Wówczas impulsowa funkcja przejścia jest przesunięta o wartość τ na osi odciętych i ma oznaczenie $h(t-\tau)$


$p(t)$
$1/d\tau$
t
τ
$d\tau$
$h(t-\tau)$
t
τ

Odpowiedź układu wymuszonego dowolną funkcją czasu wyprowadzimy na podstawie zasady superpozycji (słusznej tylko dla układów liniowych). Jak wspomniano wcześniej obciążenie $P(t)$ będące dowolną funkcją czasu i szkicowo przedstawione na rysunku wcześniej podzielimy na skończoną liczbę impulsów $dI = P(\tau)d\tau$ (nazwanych impulsami elementarnymi), które działają w chwilach τ. Reakcja układu dla czasu $t > \tau$ na impuls elementarny przyjmuje postać

$$dq(t) = dIh(t-\tau) = [P(\tau)d\tau]h(t-\tau) \tag{105}$$

Sumując odpowiedzi układu na wszystkie elementarne impulsy w przedziale $< 0, t >$ i po przejściu do granicy otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau)P(\tau)d\tau \tag{106}$$

nazwane całką Duhamela.