POLITECHNIKA OPOLSKA

Podstawy dynamiki budowli

Seweryn Kokot

Spis zadań

Równania różniczkowe zwyczajne - powtórzenie

Równanie różniczkowe zwyczajne jest funkcją w postaci Ordinary differential equation is a function in the form

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad \text{(równanie n-tego rzędu)} \tag{1}$$

gdzie y', y^n - pochodna funkcji niewiadomej (derivative of an unknown function), y - funkcja niewiadoma (unknown function), x - zmienna niezależna (independent variable) Równanie różniczkowe liniowe zwyczajne n-tego rzędu ma postać Linear ordinary differential equation of n-th order is as follows

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = f(x) \tag{2}$$

gdzie (where)
y – funkcja niewiadoma zmiennej niezależnej (unknown function of the independent variable) x,
$p_1(x), \dots, p_n(x)$ – współczynniki zależne od (coefficients dependent from) x (w szczególnym przypadku stałe) ((in particular can be constant))

Równanie różniczkowe liniowe zwyczajne 2-ego rzędu o stałych współczynnikach (Linear ordinary differential equations of 2-nd order with constant coefficients are as follows)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$
$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

a) równanie jednorodne (homogeneous equation) $y'' + py' + qy = 0$
- przewidujemy rozwiązanie w postaci następującej funkcji (we predict the solution to be the following function)

$$y = e^{rx} \tag{4}$$

gdzie (where) r - liczba zespolona (complex number): $r = a + bi$ (dla for $b = 0$, $r = a$ jest to liczba rzeczywista (is a real number))
- obliczamy pochodne (calculate derivatives)

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2e^{rx}, \tag{5}$$

- podstawiamy powyższe wyrażenia do równania (3) i otrzymujemy

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0 \tag{6}$$

rozwiązujemy równanie kwadratowe (solve quadratic equation)

$$\Delta = p^2 - 4q \tag{8}$$

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{9}$$

Istnieją trzy przypadki rozwiązania tego równania (three cases)
1) $\Delta > 0$ - istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste (2 different real solutions)

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{r_1 x} \\ y_2 &= e^{r_2 x} \end{aligned} \tag{11}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ) (Generic solution of homogeneous equation)

$$\mathrm{RORJ}: \quad y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{12}$$

2) $\Delta = 0$ – istnieje jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty (one double real solution)

$$r_0 = \frac{-p}{2} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{r_0 x} \\ y_2 &= x \cdot e^{r_0 x} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\text{RORJ}: \quad y(x) = (C_1 + x \cdot C_2) e^{r_0 x} \tag{15}$$

3) $\Delta < 0$ - istnieją dwa pierwiastki zespolone sprzężone (2 conjugate complex number solutions)

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \quad i = \sqrt{-1} \tag{16}$$

gdzie (where) $\alpha = \frac{-p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{r_1 x} \\ y_2 &= e^{r_2 x} \end{aligned} \tag{17}$$

wykorzystujemy własność liczb zespolonych (postać trygonometryczna liczby zespolonej) using the properties of complex numbers and trigonometric form of a complex number

$$e^{r}=e^{\alpha+\beta i}=e^{\alpha}\cdot e^{\beta i}=e^{\alpha}\cdot(\cos\beta+i\sin\beta) \tag{18}$$

$$\text{RORJ}:\quad y(x)=e^{\alpha x}\cdot(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \tag{19}$$

równanie amplitudowe (amplitude form of the equation)

$$y=Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+B) \tag{20}$$

gdzie (where)

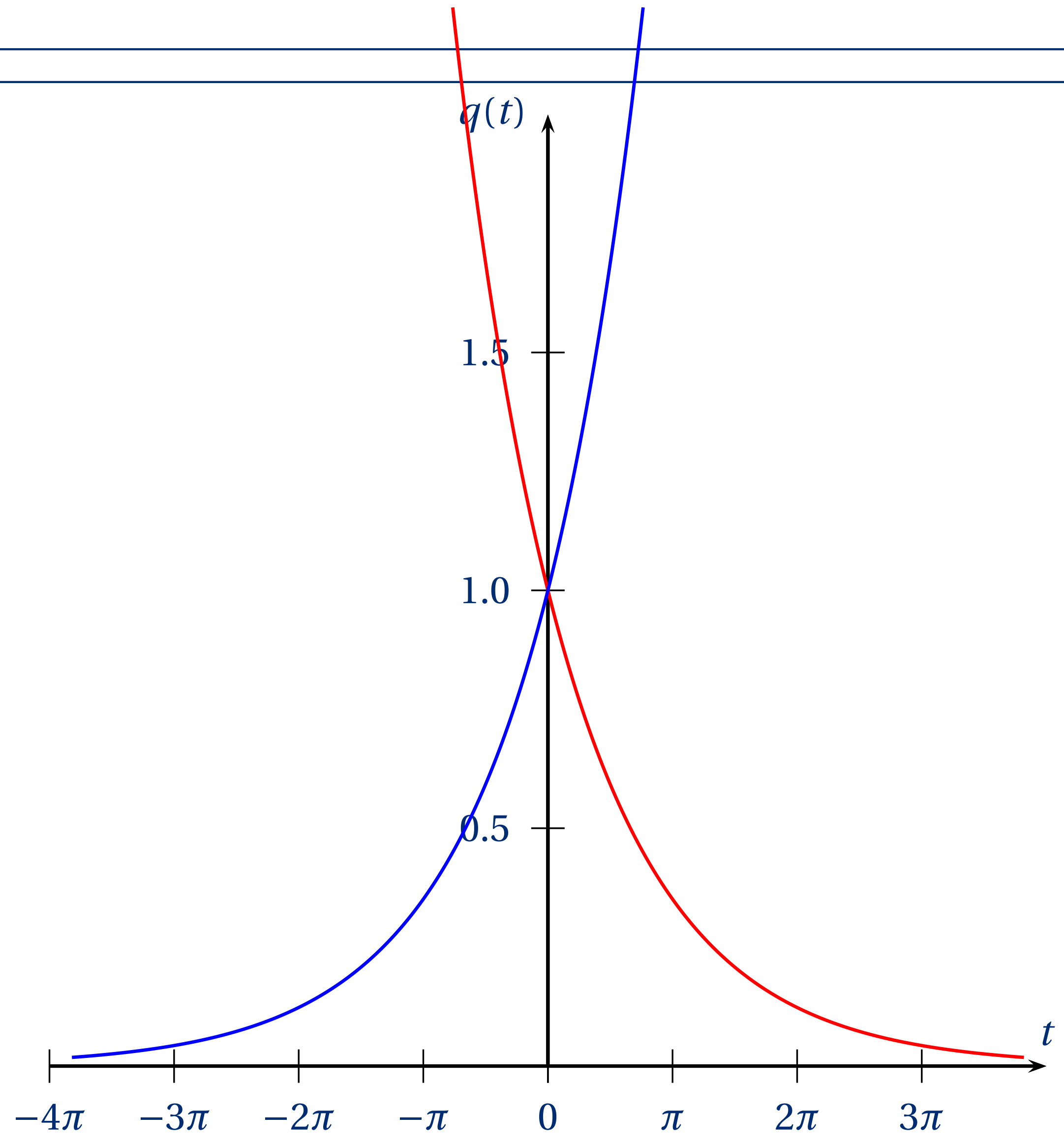
$$\frac{C_1}{C_2}=\operatorname{tg}B,\qquad \frac{C_2}{\cos B}=A \tag{21}$$

$$B=\operatorname{tg}^{-1}\frac{C_1}{C_2},\qquad A=\frac{C_2}{\cos B} \tag{22}$$

b) równanie niejednorodne (nonhomogeneous equation)

$$RORN=RORJ+RSRN \tag{23}$$

RORN – rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (generic solution of the


q(t)
1.5
1.0
0.5
t
−4π −3π −2π −π 0 π 2π 3π

Równania różniczkowe zwyczajne - przykłady

Równania różniczkowe zwyczajne - powtórzenie

Przykład 1.
Rozwiązać równanie różniczkowe, które ma następującą postać (brak siły wymuszającej, brak oporu)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (\ddot{y} + \omega^2 y = 0) \tag{24}$$

- przewidujemy

$$y = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = r^2 e^{rt} \tag{25}$$

- równanie charakterystyczne

$$e^{rt}(r^2 + \omega^2) = 0 \tag{26}$$

$$r^2 + \omega^2 = 0 \tag{27}$$

$$\Delta = -4\omega^2, \quad \sqrt{\Delta} = 2\omega i \tag{28}$$

$$r_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \pm\omega i \tag{29}$$

$$r = \alpha + \beta i \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = \omega \tag{30}$$

$$RORJ: \quad y = e^{0t} \cdot (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \tag{31}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2} \tag{32}$$

$$y = C_2 (\operatorname{tg} \varphi \cos \omega t + \sin \omega t) = \underbrace{\frac{C_2}{\cos \varphi}}_{A} (\sin \varphi \cos \omega t + \sin \omega t \cos \varphi) \tag{33}$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{34}$$

Przykład 2. Treść jak wyżej

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \beta \sin pt, \quad \omega^2 \neq p^2 \tag{35}$$

$$RORN = RORJ + RSRN \tag{36}$$

Przewidujemy rozwiązanie szczególne w następującej postaci

$$y = C \sin pt \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Cp \cos pt \\ \ddot{y} &= -Cp^2 \sin pt \end{aligned} \tag{38}$$

Podstawiając do równania

$$\sin pt(-Cp^2 + C\omega^2) = \beta \sin pt| : \sin pt \tag{39}$$

$$C(-p^2 + \omega^2) = \beta \tag{40}$$

$$C = \frac{\beta}{\omega^2 - p^2} \tag{41}$$

$$RSRN: \quad y = \frac{\beta}{\omega^2 - p^2} \cdot \sin pt \tag{42}$$

$$RORJ: \quad y = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{43}$$

$$RORN: \quad y = A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{\beta}{\omega^2 - p^2} \cdot \sin pt \tag{44}$$

Przykład 3. Rozwiązać następujące równanie różniczkowe

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{45}$$

Poszukujemy rozwiązania typu

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 \cdot e^{rx}, \tag{46}$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \tag{47}$$

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{48}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{49}$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{50}$$

1) $\Delta > 0$, $b^2 > 4ac$, $b \in (-\infty, -\sqrt{4ac})$ i $b \in (\sqrt{4ac}, \infty)$
Istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{51}$$

$$RS: \quad y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x} \tag{52}$$

$$RORJ: \quad y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{53}$$

Wykres jest rodziną krzywych nieoscylujących
2) $\Delta = 0$, $b = \pm\sqrt{4ac}$

$$r_0 = -\frac{b}{2a} \tag{54}$$

Rozwiązanie szczególne (RS)

$$RS: \quad y_1 = e^{r_0 x}, \quad y_2 = x e^{r_0 x} \tag{55}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ)

$$RORJ: \quad y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x} \tag{56}$$

Wykres jest rodziną krzywych nieoscylujących

3) $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad b \in (-\sqrt{4ac}, +\sqrt{4ac})$
Istnieją dwa różne pierwiastki zespolone sprzężone

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \tag{57}$$

Tworzymy funkcję wykładniczą w postaci

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \tag{58}$$

$$\begin{aligned} RS: \quad & \Re(y_1) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ & \Im(y_1) = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned} \tag{59}$$

$$RORJ: \quad y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \tag{60}$$

Wykres jest rodziną krzywych oscylujących

Przykład 4.

Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$ay'' + by' + cy = P_0 \sin px \tag{61}$$

poszukujemy rozwiązania typu

$$y(x) = A_1 \sin px + A_2 \cos px \tag{62}$$

$$y'(x) = A_1 p \cos px - A_2 p \sin px \tag{63}$$

$$y''(x) = -A_1 p^2 \sin px - A_2 p^2 \cos px \tag{64}$$

po podstawieniu otrzymamy

$$\begin{aligned} &a(-A_1 p^2 \sin px - A_2 p^2 \cos px) \\ &+b(A_1 p \cos px - A_2 p \sin px) \\ &+c(A_1 \sin px + A_2 \cos px) = P_0 \sin px \end{aligned} \tag{65}$$

po przemnożeniu nawiasów lewej strony otrzymamy

$$\begin{aligned} &-ap^2 A_1 \sin px - ap^2 A_2 \cos px \\ &+bpA_1 \cos px - bpA_2 \sin px \\ &+cA_1 \sin px + cA_2 \cos px = P_0 \sin px + 0 \cos px \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{cases} F(\sin) = 0 \\ F(\cos) = 0 \end{cases} \tag{67}$$

$$\begin{cases} (c - ap^2)A_1 - bpA_2 = P_0 \\ (c - ap^2)A_2 + bpA_1 = 0 \end{cases} \tag{68}$$

$$A_1 = P_0 \frac{c - ap^2}{(c - ap^2)^2 - b^2 p^2} \tag{69}$$

$$A_2 = P_0 \frac{-bp}{(c - ap^2)^2 + b^2 p^2} \tag{70}$$

$$\text{RSRN:} \quad y(x) = A_1 \sin px + A_2 \cos px \tag{71}$$

$$\text{RORN:} \quad y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + A_1 \sin px + A_2 \cos px \tag{72}$$

gdzie:

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \tag{73}$$

Więzi w układach dynamicznych

Więzi w układach dynamicznych

1. Więzi nieodkształcalne są równoznaczne z podporami
2. Więzi odkształcalne

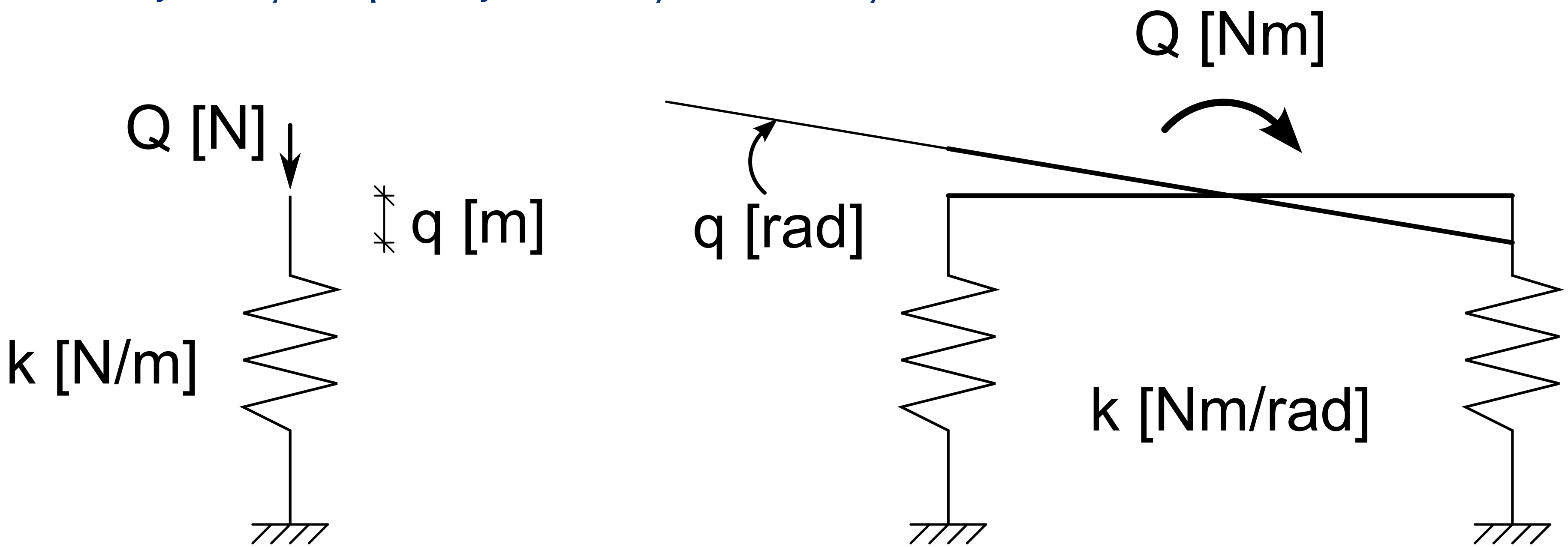
W dynamice budowli analizuje się tak zwane więzi odkształcalne reprezentujące własności sprężyste konstrukcji.
Definicja: Sztywnością k więzi liniowo–sprężystej nazywamy stosunek siły czynnej Q do odpowiadającego jej przemieszczenia q:

$$k = \frac{Q}{q} \tag{74}$$

Definicja: Podatnością δ więzi liniowo–sprężystej nazywamy stosunek przemieszczenia q do siły Q.

$$\delta = \frac{q}{Q} \tag{75}$$

Za przemieszczenie i siłę przyjmujemy tak zwane wielkości uogólnione, czyli zarówno translacje i siły skupione jak obroty i momenty:

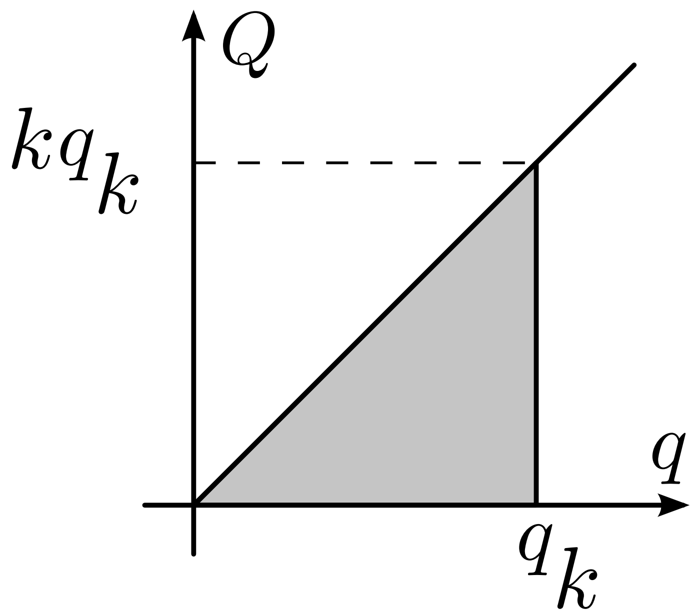


Na podstawie definicji

$$k \cdot \delta = 1 \tag{76}$$

2. Energia potencjalna więzi sprężystej

Zależność przemieszczenie–siła dla więzi liniowo–sprężystej ($Q = k \cdot q$)

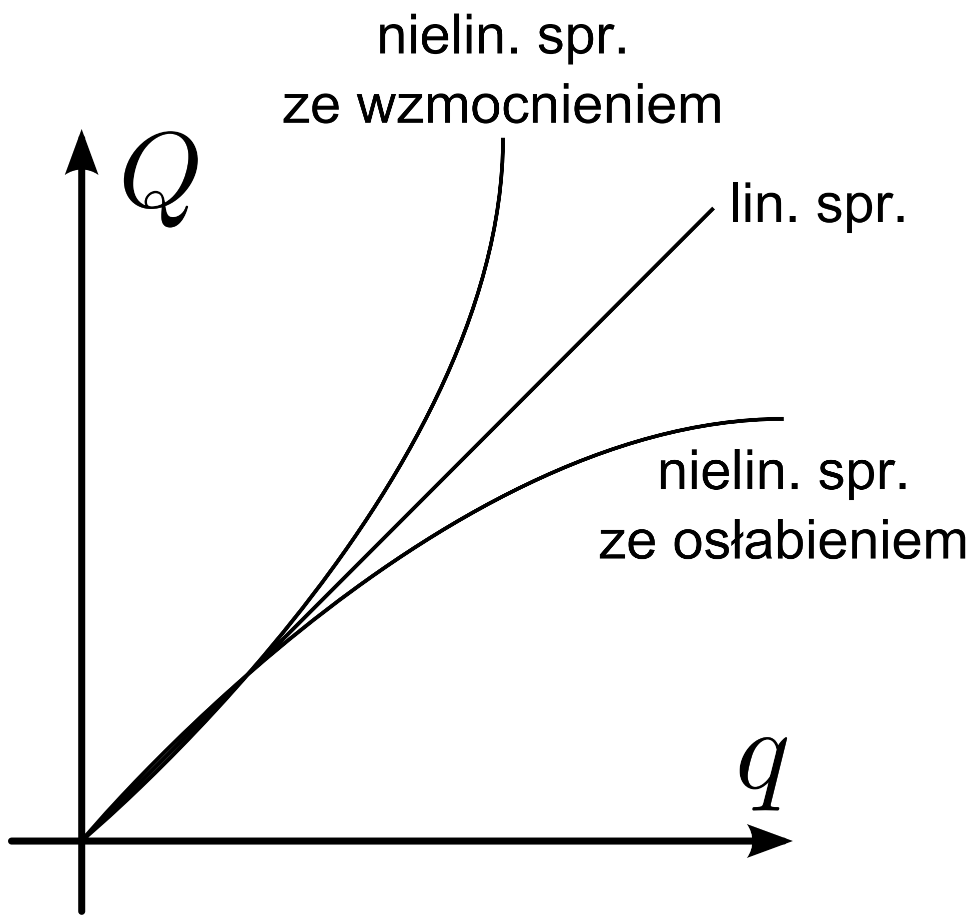


$$E_p(q) = \int_0^{q_k} Q(q)\,dq = \int_0^{q_k} k \cdot q\,dq = \left[k\frac{q^2}{2}\right]_0^{q_k} = \frac{1}{2}kq_k^2 \tag{77}$$

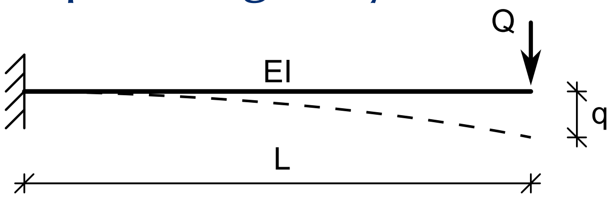
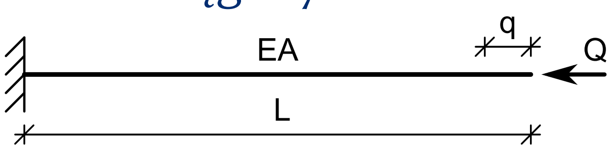
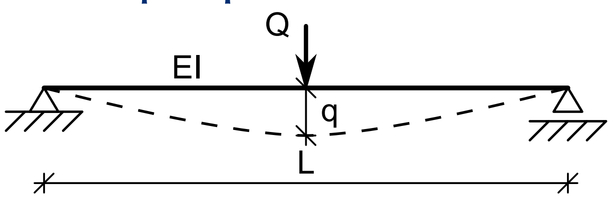
Ogólnie dla dowolnego q:

$$E_p = \frac{1}{2}kq^2 \tag{78}$$

Dla więzi nieliniowo–sprężystych $Q = f(q)$ i całka powyższa może być bardziej skomplikowana.



3. Przykłady wyznaczania najprostszych więzi liniowo–sprężystych

schemat	z wzorów statyki	parametry
wspornik zginany 	$q = \dfrac{QL^3}{3EI}$	$\delta = \dfrac{q}{Q} = \dfrac{L^3}{3EI}$, $k = \dfrac{Q}{q} = \dfrac{3EI}{L^3}$
pręt osiowo ściskany lub rozciągany 	$q = \dfrac{QL}{EA}$	$\delta = \dfrac{q}{Q} = \dfrac{L}{EA}$, $k = \dfrac{Q}{q} = \dfrac{EA}{L}$
belka zginana wolnopodparta 	$q = \dfrac{QL^3}{48EI}$	$\delta = \dfrac{q}{Q} = \dfrac{L^3}{48EI}$, $k = \dfrac{Q}{q} = \dfrac{48EI}{L^3}$

Przy zginaniu:

$$q = \int_s \frac{M_1 M_p}{EI} ds \tag{79}$$

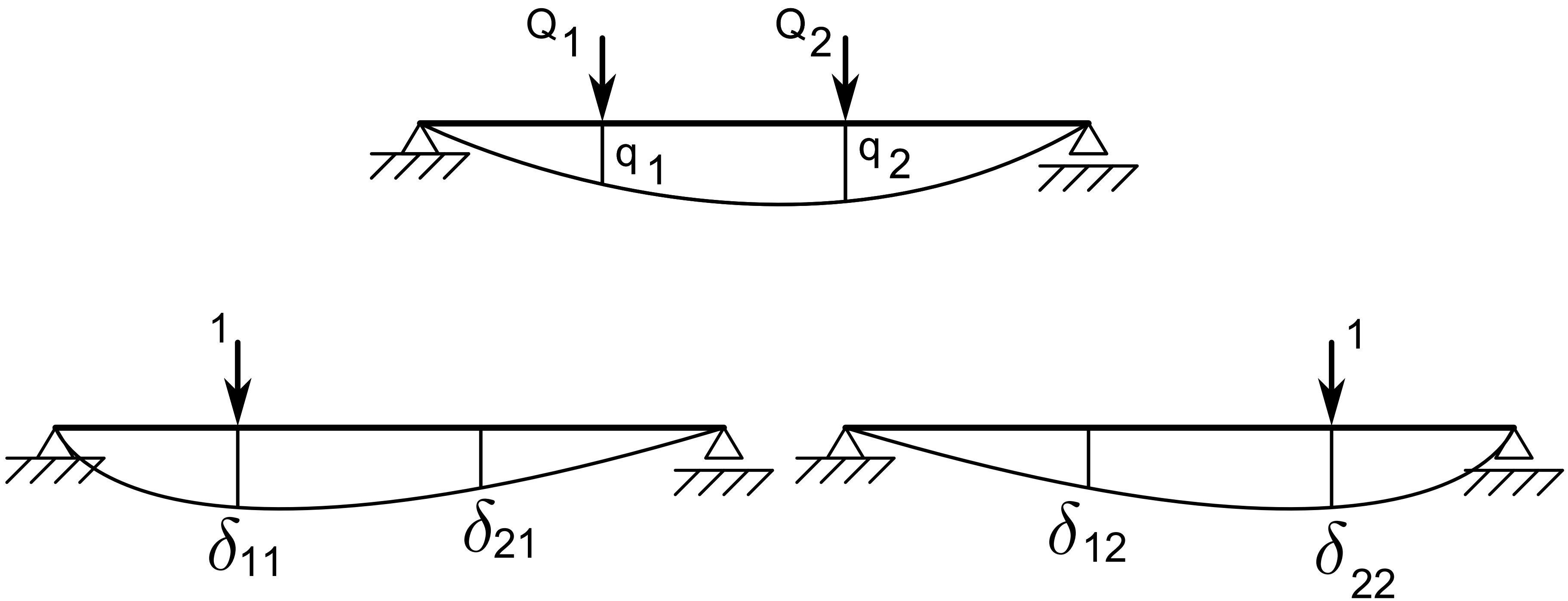
Ponieważ podatność δ można uznać za przemieszczenie odpowiadające jednostkowej sile przyłożonej do układu więc przy zginaniu

$$\delta = \int_s \frac{(M_1)^2}{EI} ds \tag{80}$$

(Całkę tę można wyznaczyć jak w metodzie sił przez mnożenie wykresów)

Sztywność k uznać można za siłę, która powstaje w układzie przy wymuszeniu jednostkowego przemieszczenia. Sztywności można wyznaczyć za pomocą wzorów transformacyjnych metody przemieszczeń.

4. Więzi sprzężone (dla zbiorów współrzędnych uogólnionych)



z twierdzenia Maxwella o wzajemności przemieszczeń $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

δ_{ij} – (jak w metodzie sił) przemieszczenie na kierunku i pod wpływem jednostkowej siły na kierunku j

Jeśli chcemy wyznaczyć przemieszczenia q_1, q_2 pod wpływem obu sił Q_1 i Q_2 jednocześnie to stosujemy zasadę superpozycji.

$$\begin{aligned} q_1 &= \delta_{11} Q_1 + \delta_{12} Q_2 \\ q_2 &= \delta_{21} Q_1 + \delta_{22} Q_2 \end{aligned} \tag{81}$$

w zapisie macierzowym

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{Q} \tag{82}$$

gdzie

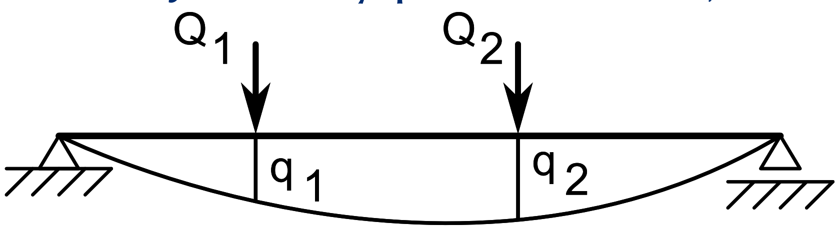
$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{83}$$

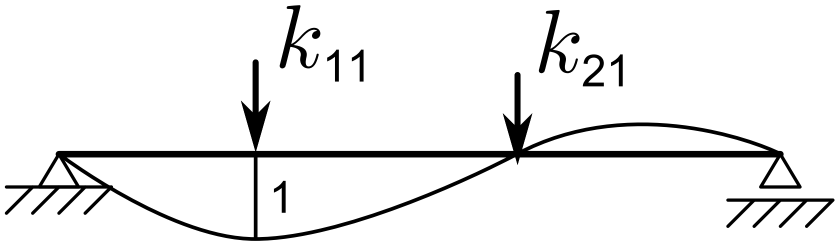
Definicja: Macierz $\boldsymbol{D}$ jest macierzą podatności w obranym zbiorze współrzędnych uogólnionych, który w ogólnym przypadku ma postać q_1, q_2, q_3,… q_n.
Wtedy

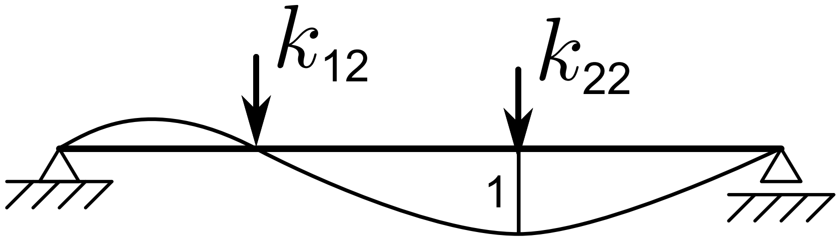
$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \tag{84}$$

Symetria $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ z twierdzenia Bettiego.

Ujęcie odwrotne (w notacji metody przemieszczeń)







k_{11}, k_{21} – siły potrzebne do utrzymania stanu przemieszczeń $q_1 = 1$ i $q_2 = 0$
k_{12}, k_{22} – siły potrzebne do utrzymania stanu przemieszczeń $q_2 = 1$ i $q_1 = 0$
Definicja: Macierz $\boldsymbol{K}$ jest macierzą sztywności w obranym zbiorze współrzędnych uogólnionych, który w ogólnym przypadku ma postać q_1, q_2, q_3,… q_n.

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{85}$$

Macierze podatności $\boldsymbol{D}$ i sztywności $\boldsymbol{K}$ są symetryczne i kwadratowe oraz spełniają zależność

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} \tag{86}$$

gdzie $\boldsymbol{I}$ to macierz jednostkowa.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{D}^{-1}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{K}^{-1} \tag{87}$$

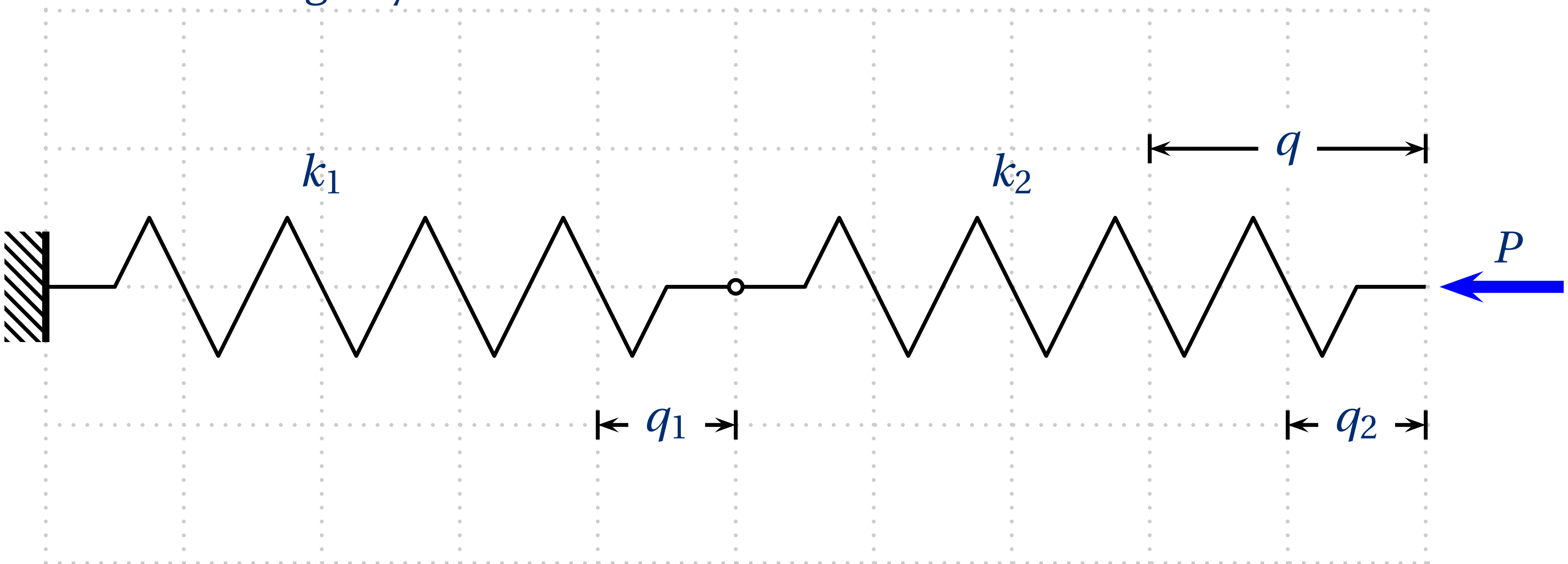
$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{Q} \tag{88}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{Q} \tag{89}$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q} \tag{90}$$

5. Zestawy szeregowe i równoległe więzi sprężystych

Zestaw szeregowy

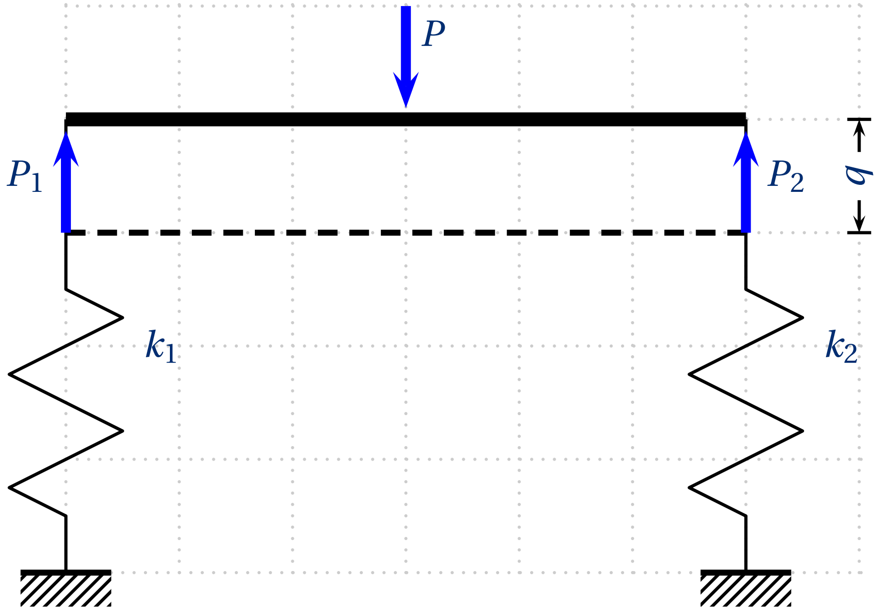


- z równości przemieszczeń i definicji sztywności ($k = P/q$) mamy

$$q = q_1 + q_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \underbrace{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}_{\frac{1}{k}} P = \underbrace{(\delta_1 + \delta_2)}_{\delta} P \tag{91}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{92}$$

Zestaw równoległy



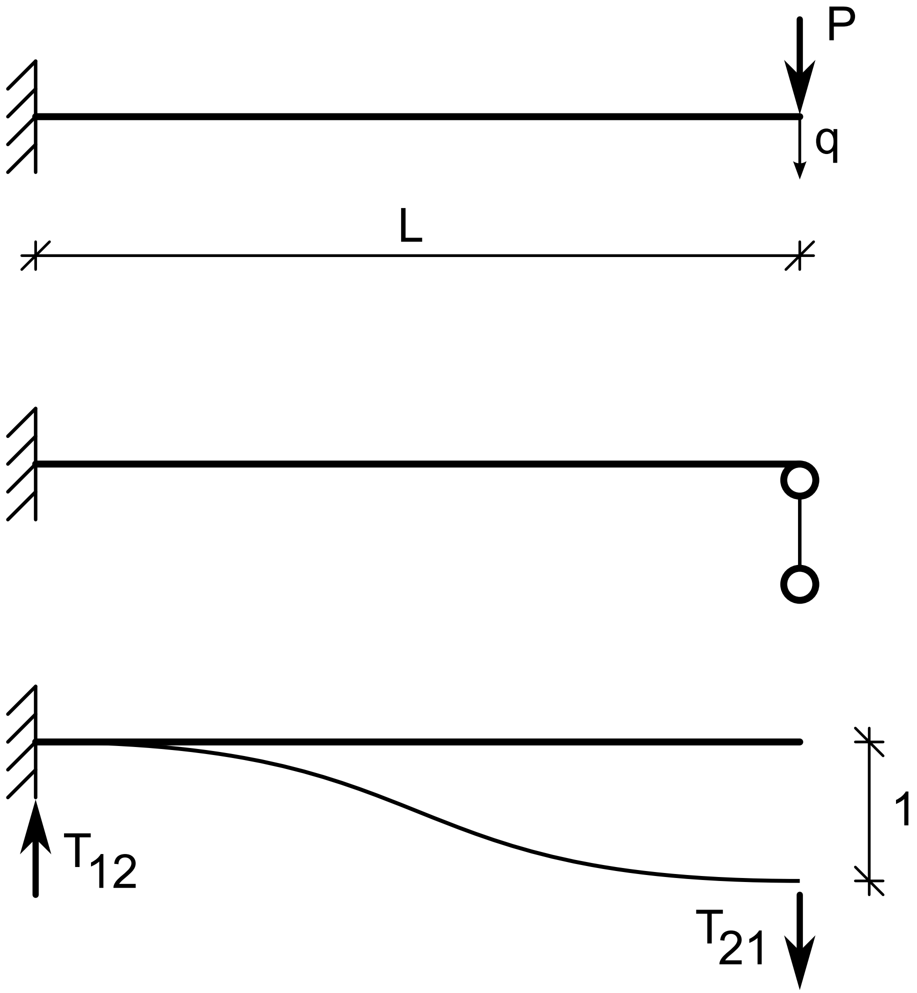
- z równowagi sił i definicji sztywności ($k = P/q$) mamy

$$P = P_1 + P_2 = k_1 \cdot q + k_2 \cdot q = \underbrace{(k_1 + k_2)}_{k} q = \underbrace{\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right)}_{\frac{1}{\delta}} q \tag{93}$$

$$\begin{aligned} k &= k_1 + k_2 \\ \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \end{aligned} \tag{94}$$

Obliczanie sztywności i podatności

Wyznaczyć k, δ i q dla zadanego układu wykorzystując metodę przemieszczeń. Determine k, δ and q for a given system using the displacement method.



- z metody przemieszczeń (using the displacement method)

$$T_{12} = T_{21} = -\frac{3EI}{L^2}\overbrace{\varphi_1}^{0} + \frac{3EI}{L^3}(\overbrace{v_1}^{-1} - \overbrace{v_2}^{0}) = -\frac{3EI}{L^3} \tag{95}$$

- sztywność (stiffness)

$$k = -T_{21} = \frac{3EI}{L^3} \tag{96}$$

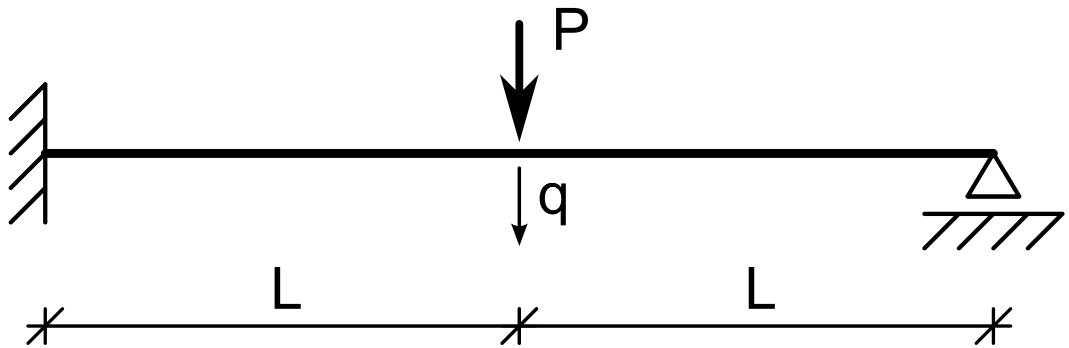
- podatność (flexibility)

$$\delta = \frac{1}{k} = \frac{L^3}{3EI} \tag{97}$$

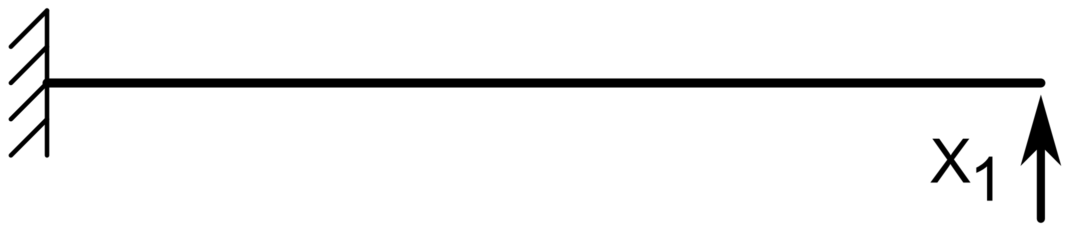
- przemieszczenie (displacement)

$$q = -\frac{P}{k} = -\frac{PL^3}{3EI} \tag{98}$$

Wyznaczyć k, δ i q wykorzystując metodę sił. Determine ... using the force method



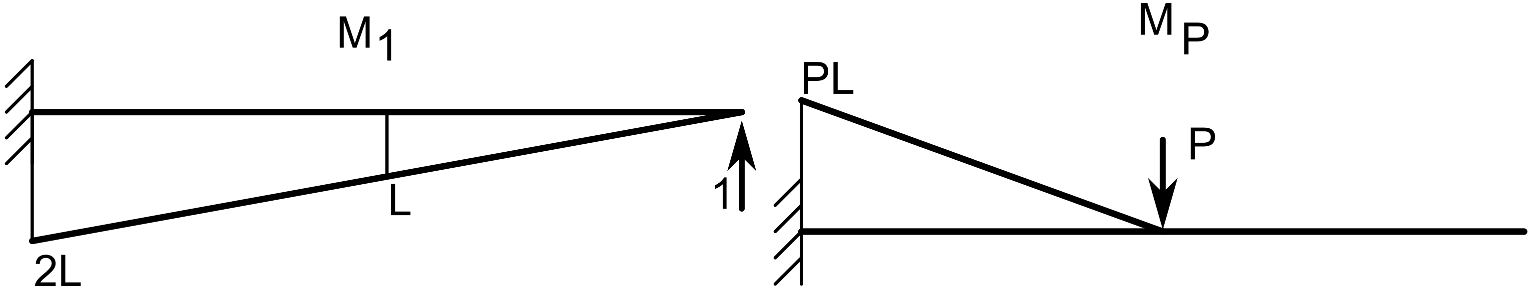
- układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny - przyjęto układ podstawowy, the system is once statically undetermined - consider the primary system



- równanie kanoniczne metody sił. cannonical equation of the force method

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0 \tag{99}$$

- wykresy momentów od stanu (bending moments) $X_1 = 1$ i stanu (state) P



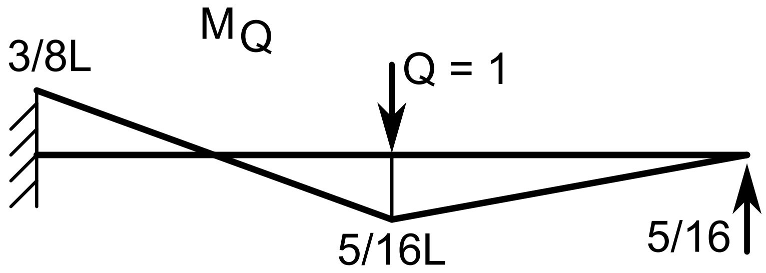
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}(0.5 \cdot 2L \cdot 2L \cdot \frac{2}{3} \cdot 2L) = \frac{8L^3}{3EI} \tag{100}$$

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI}(0.5L \cdot PL \cdot (\frac{2}{3}L + L)) = -\frac{5PL^3}{6EI} \tag{101}$$

$$\frac{8L^3}{3EI}X_1 - \frac{5PL^3}{6EI} = 0 \tag{102}$$

$$X_1 = \frac{5P}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{16}P \tag{103}$$

- wykres momentów do obliczenia przemieszczenia w środku belki (bending moment diagram to calculate the displacement at midspan)



$$\delta = \int \frac{MM_p}{EI} ds \tag{104}$$

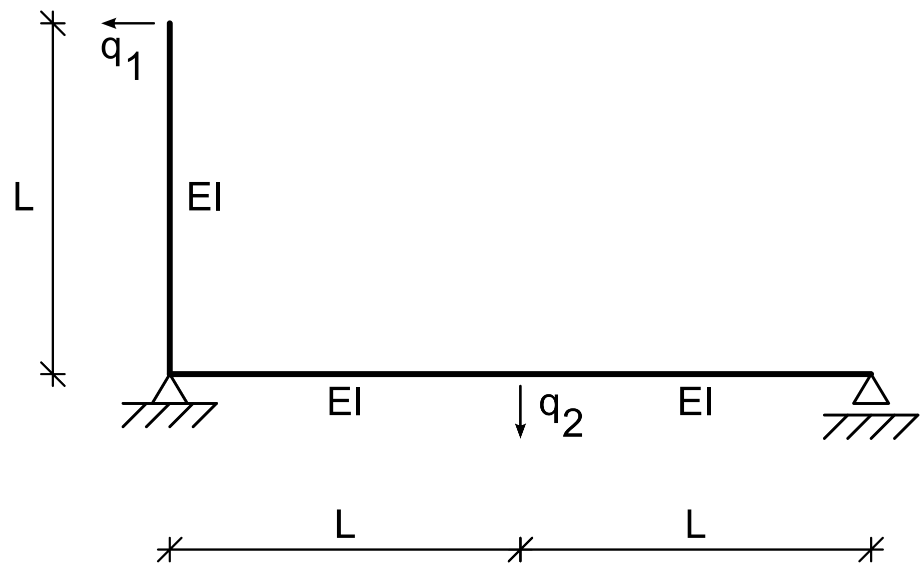
$$\begin{aligned} \delta = \int \frac{MM_p}{EI} ds &= \frac{L}{6EI}(2\cdot(\frac{3L}{8})^2 + 2\cdot(\frac{5L}{16})^2 - 2\cdot\frac{3L}{8}\frac{5L}{16} + 2\cdot(\frac{5L}{16})^2) \\ &= \frac{56L^3}{768EI} = \frac{7L^3}{96EI} \end{aligned} \tag{105}$$

$$k = \frac{1}{\delta} = \frac{96EI}{7L^3} \tag{106}$$

$$q = -\frac{P}{k} = -\frac{7PL^3}{96EI} \tag{107}$$

Belka załamana Two segment beam

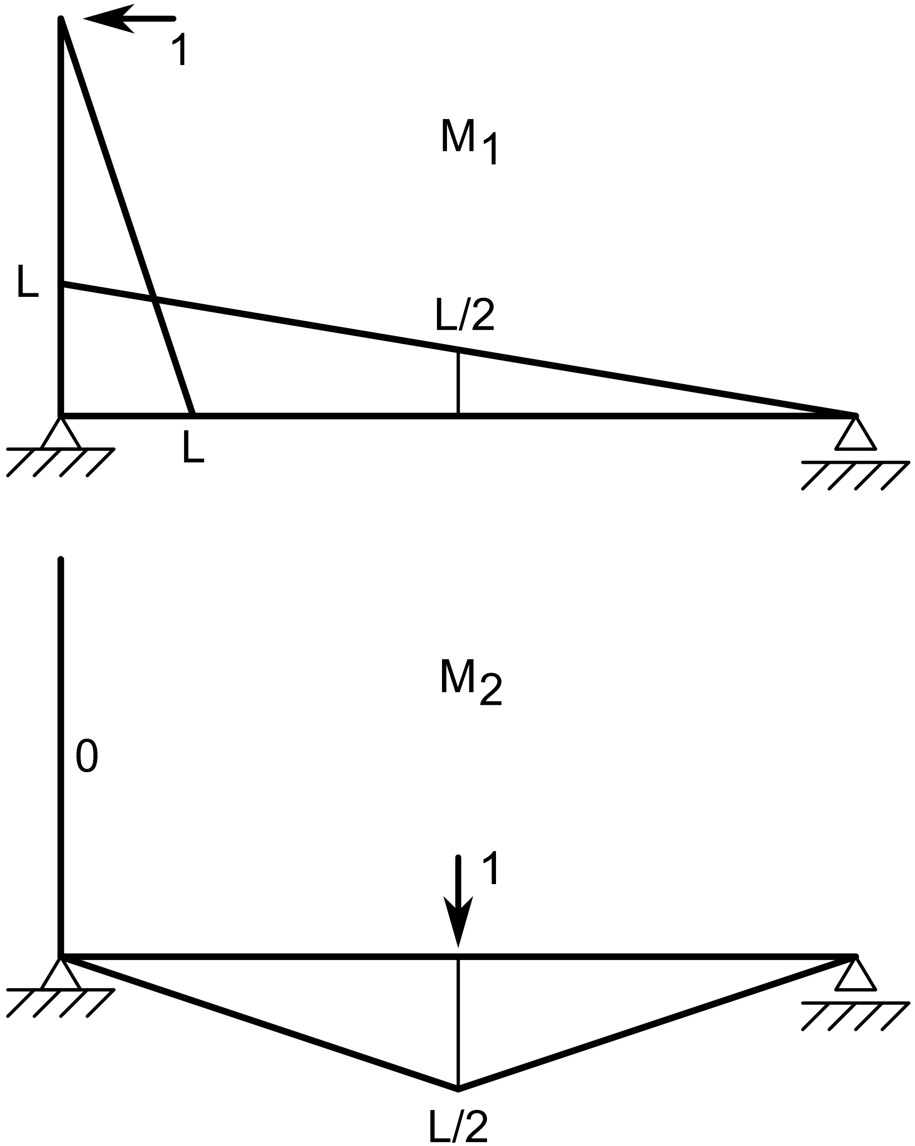
Dla zadanej belki załamanej wyznaczyć macierze podatności i sztywności a następnie rozwiązać zagadnienie własne. For a given beam, determine the flexibility and stiffness matrices and next solve the eigenvalue problem.



Samodzielnie wyznaczyć wykresy momentów (First determine bending moment distributions for applied unit forces) M_1 i M_2, a następnie obliczyć współczynniki (and then the coefficients of the flexibility matrix): δ_{11}, $\delta_{12} = \delta_{21}$ i δ_{22} macierzy podatności:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \tag{108}$$

wykresy momentów od jednostkowych sił



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}LL\frac{2}{3}L + \frac{1}{2}L\cdot 2L\frac{2}{3}L\right) = \frac{L^3}{EI} \tag{109}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{3}\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{L}{2}L\frac{2}{3}\frac{L}{2}\right] = -\frac{L^3}{4EI} \tag{110}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left(2\frac{1}{2}\frac{L}{2}L\frac{2}{3}\frac{L}{2}\right) = \frac{L^3}{6EI} \tag{111}$$

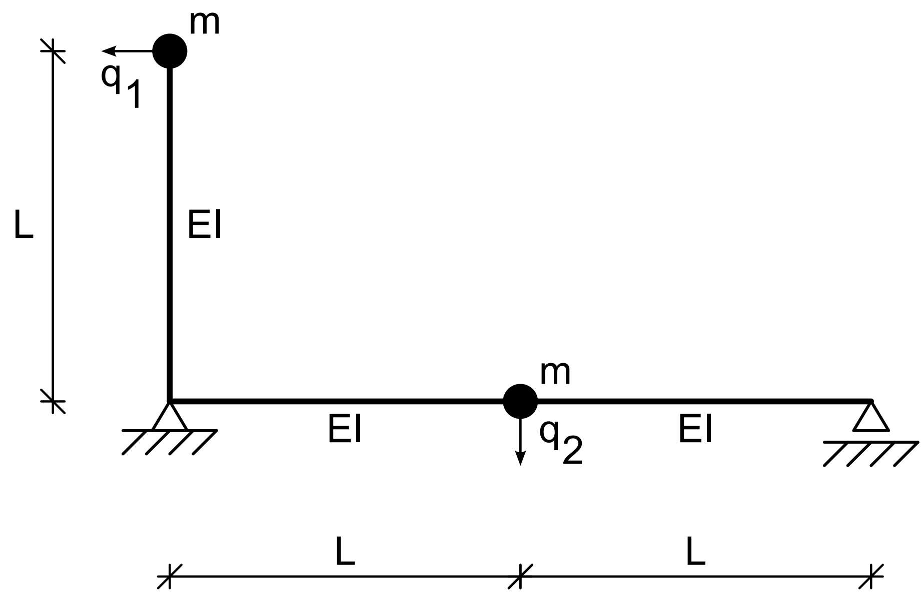
$$\boldsymbol{D} = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 1 & -0.25 \\ -0.25 & 0.167 \end{bmatrix} \tag{112}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{D}^{-1}, \quad k_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}D_{ij}}{|\boldsymbol{D}|} \tag{113}$$

$$|\boldsymbol{D}| = 0.1045\frac{L^6}{(EI)^2} \tag{114}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1.60 & 2.39 \\ 2.39 & 9.57 \end{bmatrix} \tag{115}$$

- rozkład mas skupionych na kierunkach 1 i 2



- macierz bezwładności określona metodą mas skupionych

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \tag{116}$$

Rozwiązanie zagadnienia własnego - znalezienie częstości własnych i postaci drgań własnych (macierz własna)
- równanie zagadnienia własnego

$$|\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{B}| = 0 \tag{117}$$

$$|\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1.60\frac{EI}{L^3} - \lambda m & 2.39\frac{EI}{L^3} \\ 2.39\frac{EI}{L^3} & 9.57\frac{EI}{L^3} - \lambda m \end{vmatrix} = 9.57\frac{(EI)^2}{L^6} - 11.17\lambda m\frac{EI}{L^3} + \lambda^2 m^2 = 0 \tag{118}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 124.77 - 4 \cdot 1 \cdot 9.6 = 86.37\frac{(EI)^2 m^2}{L^6} \tag{119}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} 10.23\frac{EI}{mL^3} \\ 0.94\frac{EI}{mL^3} \end{cases} \tag{120}$$

$$\omega_{1,2} = \begin{cases} 0.97\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \\ 3.20\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \end{cases} \tag{121}$$

- wektory własne (postacie drgań) wyznaczamy ze wzoru

$$(\boldsymbol{K} - \omega_i^2 \boldsymbol{B})\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}, \quad i = 1,2 \tag{122}$$

$$\left(\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1.60 & 2.39 \\ 2.39 & 9.57 \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{123}$$

- pierwsza postać

$$\omega_1 : \quad \begin{cases} 8.63\frac{EI}{L^3} w_{11} + 2.39\frac{EI}{L^3} w_{21} = 0 \\ 2.39\frac{EI}{L^3} w_{11} + 0.66\frac{EI}{L^3} w_{21} = 0 \end{cases} \tag{124}$$

dla $w_{21} = 1$: $w_{11} = -0.28$

- druga postać

$$\omega_2 : \quad \begin{cases} -0.66\frac{EI}{L^3} w_{12} + 2.39\frac{EI}{L^3} w_{22} = 0 \\ 2.39\frac{EI}{L^3} w_{12} - 8.63\frac{EI}{L^3} w_{22} = 0 \end{cases} \tag{125}$$

dla $w_{12} = 1$: $w_{22} = 0.28$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.28 & 1 \\ 1 & 0.28 \end{bmatrix} \tag{126}$$

- wykresy dwóch postaci drgań własnych